Einstein Revisited:

Zur Elektrodynamik bewegter Bezugssysteme

Siegfried Petry

28.März 2009

Vorbemerkung

Wenn man die in meinem Kommentar zu Einsteins Aufsatz »Zur Elektrodynamik bewegter Körper« (Link) aufgeführten Fehler und Mängel beseitigt und die Maxwellschen Gleichungen ins Internationale Einheitensystem (SI) überträgt, erhält man einen Text, der etwa so lauten könnte:

Zur Elektrodynamik bewegter Bezugssysteme

Das Ergebnis des von Michelson und Morley 1887 unternommenen Experiments führt – zusammen mit anderen Versuchen und Überlegungen – zu dem Schluss, dass die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit für jeden Beobachter – unabhängig von dessen Bewegung relativ zur Lichtquelle – stets denselben Wert hat. Wir wollen diese Annahme das Prinzip der Konstanz der (Vakuum-)Lichtgeschwindigkeit nennen und zur Voraussetzung der folgenden Überlegungen machen. Eine einfachere und präzisere Formulierung dieses Prinzips lautet: Die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit hat in allen Inertialsystemen (nicht beschleunigten Bezugssystemen) denselben Wert.

Aus dem Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ergeben sich sofort drei einfache Folgerungen:

1. Nach der Maxwellschen Elektrodynamik besteht zwischen der Vakuum-Lichtgeschwindigkeit c einerseits und der elektrischen Feldkonstanten ε_0 sowie der magnetischen Feldkonstanten μ_0 andererseits die Beziehung

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

Daraus folgt, dass auch diese beiden Feldkonstanten in allen Inertialsystemen dieselben Werte haben.

2. Es ist auch mit optischen Methoden nicht möglich, die Geschwindigkeit eines Bezugssystems relativ zum »absoluten Raum«, also seine »absolute Geschwindigkeit« zu bestimmen. Das bedeutet: Ein »absolut ruhendes« Bezugssystem ist nicht als solches erkennbar.

3. Nicht nur die mechanischen Vorgänge verlaufen in allen Inertialsystemen nach denselben Gesetzen, sondern auch die optischen. Alle Inertialsysteme sind also in jeder Hinsicht gleichberechtigt. Wir nennen dies das Prinzip der Gleichberechtigung der Inertialsysteme. Bei einer strengen (und konsequenten) Interpretation dieses Prinzips umfasst es auch das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit.

Kinematischer Teil

§ 1 Messvorschrift für die Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse

Für das Folgende ist es notwendig, eine Messvorschrift für die Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse E_1 und E_2 zu besitzen, wenn diese an zwei verschiedenen Orten A und B stattfinden. Wir verabreden dazu: Beim Eintreffen der Ereignisse in A und B werde dort je ein Lichtsignal ausgelöst, das sich auf der Verbindungsstrecke der beiden Orte ausbreitet. Wenn die beiden Lichtsignale im Mittelpunkt der Strecke AB gleichzeitig eintreffen, dann haben die beiden Ereignisse gleichzeitig stattgefunden.

§ 2 Messvorschrift für den Synchrongang zweier Uhren

Zur Zeit t_A werde am Ort *A* der einen Uhr ein Lichtsignal ausgelöst, das zur Zeit t_B am Ort *B* der anderen Uhr eintreffe, dort reflektiert werde und zur Zeit t'_A wieder in *A* sei. Wenn

$$t_B - t_A = t'_A - t_B$$

ist, gehen die beiden Uhren synchron.

§ 3 Theorie der Koordinaten- und Zeittransformation

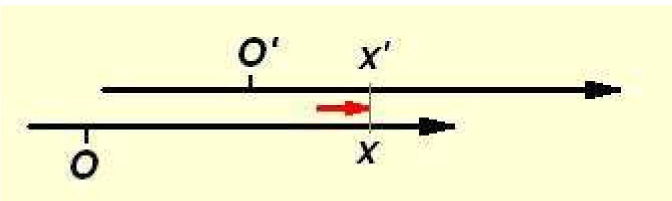
Gegeben seien zwei dreidimensionale kartesische Koordinatensysteme *K(X, Y, Z)* und *K'(X', Y', Z')* mit paarweise parallelen Achsen. Die *X*- und die *X'*-Achse sollen zudem aufeinander liegen. In beiden Koordinatensystemen sollen sich an allen relevanten Orten synchron laufende Uhren befinden. Die Koordinatensysteme zusammen mit diesen Uhren bilden dann zwei Bezugssysteme *S* und *S'*. Das System *S* werde nun in Richtung seiner *X*-Achse eine gewisse Strecke nach rechts verschoben, das System *S'* in analoger Weise um die gleiche Strecke nach links. Dann werde dem System *S* eine konstante Beschleunigung nach links erteilt und dem System *S'* eine gleiche Beschleunigung nach rechts, bis die Systeme relativ zueinander die Geschwindigkeit *v* bzw. *–v* haben. Wenn die Ursprünge *O* und *O'* der beiden Systeme sich gerade einander gegenüber befinden, werden die in *O* und *O'* befindlichen Uhren auf null gestellt. Danach werden alle Uhren in *S* mit der Uhr in *O* und alle Uhren in *S'* mit der Uhr in *O'* synchronisiert.

In der klassischen Galilei-Newton-Mechanik gelten nun für die Orts- und Zeitkoordinaten in beiden Systemen folgende Beziehungen (»Galilei-Transformationen«):

$$x' = x - vt \qquad x = x' + vt$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$

Es wird als selbstverständlich angenommen, dass der Ablauf der Zeit in beiden Systemen derselbe ist.

Die Galilei-Transformationen sind jedoch nicht mit dem Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit vereinbar. Dies ergibt sich aus folgenden Gedankenexperiment. Zur Zeit $t = 0$ starte in dem Punkt, in dem sich dann gerade *O* und *O'* befinden ein Lichtstrahl, der sich längs der *X*- und *X'*-Achse nach rechts bewegt. Nach einer belieben Zeit hat wegen der Bewegung der Systeme der Lichtstrahl im System *S'* eine kleinere Strecke zurückgelegt als im System *S*. Folglich kann der Lichtstrahl in den beiden Systemen nicht dieselbe Geschwindigkeit haben.



Um dem Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit zu genügen, ersetzen wir zunächst die ersten beiden Gleichungen der Galilei-Transformationen durch zwei modifizierte Gleichungen, die – ebenso wie die später folgenden Transformationsgleichungen für die Zeit – wegen der Homogenitätseigenschaften von Raum und Zeit linear sein müssen. Wir machen daher folgenden Ansatz:

$$x' = k(x - vt) \quad (1) \qquad x = k(x' + vt') \quad (2)$$

Darin ist *k* ein noch zu bestimmender Faktor, der wegen der Gleichberechtigung der Systeme in beiden Gleichungen denselben Wert haben muss. Die beiden Gleichungen dürfen sich – abgesehen von den Koordinaten – nur durch das Vorzeichen von *v* unterscheiden.

Außerdem sehen wir die Möglichkeit vor, dass in *S'* eine andere Zeit gilt als in *S*.

Als nächstes stellen wir die Bewegungsgleichungen des Lichtstrahls in beiden Systemen auf und berücksichtigen dabei, dass dieser überall dieselbe Geschwindigkeit *c* haben soll:

$$x = ct \qquad x' = ct'$$

Durch Einsetzen in (1) ergibt sich

$$ct' = k\left(ct - vt\right) \quad \Rightarrow \quad t' = kt(1 - v/c) \quad \Rightarrow \quad t'/t = k(1 - v/c) \quad (3)$$

Durch Einsetzen in (2) erhält man

$$ct = k(ct' + vt') \quad \Rightarrow \quad t = kt'(1 + v/c) \quad \Rightarrow \quad t/t' = k(1 + v/c) \quad (4)$$

Durch Multiplikation der Gleichungen (3) und (4) findet man

$$\frac{t'}{t} \cdot \frac{t}{t'} = k^2 (1 - v/c)(1 + v/c) \quad \Rightarrow \quad 1 = k^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Damit wird aus den Gleichungen (1) und (2)

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{(A)} \qquad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{(B)}$$

Die Transformationsgleichungen für *t'* und *t* erhalten wir, indem wir zunächst die Gleichung (B) nach *x'* auflösen:

$$x' = x\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - vt'.$$

Dies in die linke Seite der Gleichung (A) eingesetzt liefert

$$x\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - vt' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Durch Auflösen nach *t'* ergibt sich schließlich

$$t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{(C)}$$

Analog findet man

$$t=\frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\quad \text{(D)}$$

Die Transformationsgleichungen für *y* und *z* findet man durch folgende Überlegung:

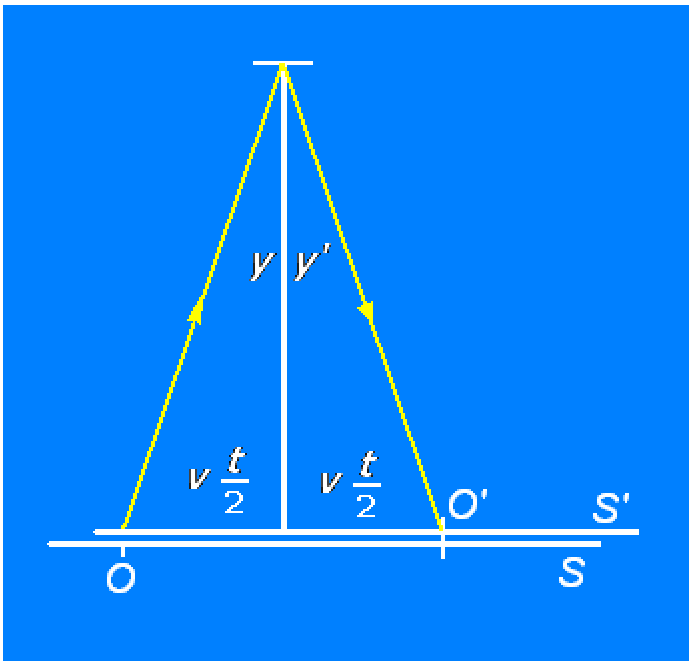
Auf der *Y'*-Achse des Systems *S'* befinde sich im Abstand *y'* von *O'* ein Spiegel, der einen zur Zeit *t'* = 0 von *O'* nach oben ausgesandten Lichtimpuls nach *O'* reflektiert. Für einen Beobachter in *S'* bewegt sich der Lichtstrahl auf der *Y'*-Achse. Der Lichtstrahl treffe zur Zeit *t'* wieder in *O'* ein. Der bis dahin von ihm zurückgelegte Weg ist

$$s'=2y'$$

Die Laufzeit des Lichtimpulses ist

$$t'=\frac{s'}{c}=\frac{2y'}{c}\quad (5)$$

Für einen Beobachter in *S* bewegt sich der Lichtimpuls auf einer geknickten Linie, die mit der *X*-Achse ein gleichschenkliges Dreieck bildet:



Der im System *S* zurückgelegte Weg ist

$$s=2\sqrt{y^2+v^2\frac{t^2}{4}},$$

wobei *t* die Laufzeit des Lichtimpulses im System *S* ist. Aus dieser Gleichung folgt

$$t=\frac{s}{c}=\frac{2\sqrt{y^2+v^2\frac{t^2}{4}}}{c}.$$

Durch Quadrieren und Auflösen nach t^2 ergibt sich

$$t^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=\frac{4y^2}{c^2} \quad\Rightarrow\quad t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{2y}{c}.$$

Aus Gleichung (D) folgt mit $x' = 0$

$$t\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=t' \quad\Rightarrow\quad t'=\frac{2y}{c}.$$

Durch Vergleich mit Gleichung (5) ergibt sich

$$\frac{2y}{c}=\frac{2y'}{c} \quad\Rightarrow\quad y=y'.$$

Durch eine analoge Betrachtung findet man

$$z = z'.$$

Alle sechs Transformationsgleichungen nochmals im Zusammenhang:

$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (\mathrm{A}) \qquad\qquad x=\frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (\mathrm{B})$$

$$t'=\frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (\mathrm{C}) \qquad\qquad t=\frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad (\mathrm{D})$$

$$y'=y \quad (\mathrm{E}) \qquad\qquad z'=z \quad (\mathrm{F})$$

Die ersten vier Gleichungen liefern nur dann endliche und reelle Werte für die Koordinaten im anderen System, wenn v kleiner als c ist. Dies ist ein erster Hinweis darauf, dass die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit eine nicht zu erreichende Grenzgeschwindigkeit darstellt.

Es soll nun noch bestätigt werden, dass sich eine Lichtwelle in beiden Systemen tatsächlich mit derselben Geschwindigkeit ausbreitet. Dazu nehmen wir Folgendes an: Zur Zeit $t = t' = 0$ werde von *O* und *O’* (die in diesem Augenblick koinzidieren) eine Kugelwelle ausgesandt, welche sich im System, *S* mit der Geschwindigkeit c ausbreitet. Für alle Punkte der Wellenfront gilt dann

$$x^2+y^2+z^2=c^2t^2.$$

Diese Gleichung transformieren wir mit Hilfe der Gleichungen (B), (D), (E) und (F) und erhalten nach einfacher Rechnung

$$(x')^2+(y')^2+(z')^2=c^2(t')^2.$$

Die Lichtwelle breitet sich also auch im System *S’* nach allen Seiten mit der Geschwindigkeit c (d. h. als Kugelwelle) aus.

§ 4 Konsequenzen der Transformationsgleichungen für bewegte Körper und Uhren

Wir betrachten eine im System *S'* ruhende Kugel vom Radius *R*, deren Mittelpunkt in *O'* liegt. Ihre Gleichung lautet

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = R^2.$$

Im System *S* dagegen hat die Kugel zur Zeit $t = 0$ die Gleichung

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)^2} + y^2 + z^2 = R^2.$$

Die Kugel hat also für einen relativ dazu bewegten Beobachter die Gestalt eines Rotationsellipsoids mit den Halbachsen

$$R\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},\ \ R,\ \ R.$$

Die Kugel erscheint also dem relativ dazu bewegten Beobachter in Bewegungsrichtung verkürzt. (Später wird sich zeigen, dass der Grund dafür in der »Relativität der Gleichzeitigkeit« zu finden ist, das heißt darin, dass zwei Ereignisse, die in dem einen System gleichzeitig sind, es im anderen System nicht sind.) Im Übrigen ist auch dieser Effekt »reziprok«: Für einen Beobachter in *S'* ist ein in *S* ruhender Körper in Bewegungsrichtung verkürzt. Auch dies bestätigt die Gleichberechtigung der beiden Systeme.

Betrachten wir nun die Uhr, die im Ursprung *O'* des Systems *S'* ruht, von *S* aus. Zur Zeit $t = 0$ steht sie gegenüber von *O* und zeigt $t' = 0$ an. Zu einer späteren Zeit t_1 ist ihre Koordinate in *S*

$$x_1 = v\,t_1.$$

Aus Gleichung (B) ergibt sich die von der beobachteten Uhr angezeigte Zeit

$$t'_1 = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t_1 - \frac{v^2}{c^2}t_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = t_1\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = t_1\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Die Uhr in *S'* geht also für den Beobachter in *S* langsamer als seine eigene Uhr.

Auch dieser Effekt ist – wie die Verkürzung in Bewegungsrichtung – relativ und reziprok: Beobachtet man von *S'* aus die in *O* ruhende Uhr, so findet man für ihre Anzeige zur Zeit t'_1 den Wert

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2}x'_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{t'_1\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = t'_1\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Diese beiden Gleichungen stehen nicht in Widerspruch zueinander, denn sie gelten unter verschiedenen Voraussetzungen: die obere gilt für einen Beobachter in *S*, die untere für einen Beobachter in *S'*. Im oberen Fall wird die in *O'* ruhende Uhr von *S* aus beobachtet und mit zwei verschiedenen Uhren in

S verglichen, die für den Beobachter in S synchron gehen. Im unteren Fall wird die in O ruhende Uhr von S' aus beobachtet und mit zwei verschiedenen Uhren verglichen, die in S' synchron gehen. Letzten Endes beruht auch dieser Effekt auf der Relativität der Gleichzeitigkeit. Tatsächlich wird der Gang einer Uhr natürlich nicht dadurch objektiv (oder »absolut«) verändert, dass sie von einem anderen, relativ zu ihr bewegten System aus beobachtet wird.

§ 5 Additionstheorem für Geschwindigkeiten

Im System S' bewege sich ein Punkt gemäß den Gleichungen

$$x' = w_{x'}\,t', \quad y' = w_{y'}\,t', \quad z' = 0\ ,$$

wobei $w_{x'}$ und $w_{y'}$ die konstanten Bahngeschwindigkeiten des Punktes in Richtung der entsprechenden Achse sind. Gesucht sind die Bewegungsgleichungen des Punktes im System S. Setzt man in der ersten dieser Gleichungen

$$x' = \frac{x - v t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{(Gleichung A von S. 5) und} \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{(Gleichung C von S. 5)}$$

ein und löst nach x auf, so erhält man

$$x = \frac{v + w_{x'}}{1+\frac{v\,w_{x'}}{c^2}}\,t. \quad (6)$$

Dies ist die Gleichung einer gleichförmigen Bewegung in Richtung der X-Achse mit der Geschwindigkeit

$$w_x = \frac{v + w_{x'}}{1+\frac{v\,w_{x'}}{c^2}}. \quad (7)$$

Ferner ist (mit Gleichung (6) zum Eliminieren von x)

$$y = y' = w_{y'}\,t' = w_{y'}\frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{w_{y'}\,t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(1-\frac{v\left(v + w_{x'}\right)}{c^2 + v\,w_{x'}}\right) = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v\,w_{x'}}{c^2}}\,w_{y'}\,t\,.$$

Dies ist die Gleichung einer gleichförmigen Bewegung in Richtung der Y-Achse mit der Geschwindigkeit

$$w_y = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v\,w_{x'}}{c^2}}\,w_{y'}\ . \quad (8)$$

Im System S' hat der betrachtete Punkt die Geschwindigkeit

$$w = \sqrt{w_{x'}^2 + w_{y'}^2}\ .$$

Sie bildet mit der *X'*-Achse den Winkel

$$\alpha = \arctan \frac{w_{y'}}{w_{x'}}\ .$$

Im System *S* hat der Punkt die Geschwindigkeit

$$u = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = \frac{\sqrt{(v + w_{x'})^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) w_{y'}^2}}{1 + \frac{v\,w_{x'}}{c^2}}\ .$$

Für $w_{y'} = 0$ wird $w = w_{x'}$ und

$$u = \frac{v + w}{1 + \frac{v\,w}{c^2}}. \quad (9)$$

Man erkennt daraus, dass sich selbst durch Überlagerung sehr hoher Geschwindigkeiten keine höhere Geschwindigkeit als *c* erzielen lässt. Selbst wenn man $v = w = c$ setzt, wird *u* nicht größer als *c*.

Abschließend noch eine Folgerung von grundsätzlicher Bedeutung: Hat man drei gleichberechtigte Inertialsysteme *S, S'* und *S''* derart, dass *S'* gegenüber die Relativgeschwindigkeit *v* hat und *S''* gegenüber *S'* die Relativgeschwindigkeit *w* (beide in Richtung der *X/*X'/X''-Achsen), dann hat *S''* gegenüber *S* die Relativgeschwindigkeit

$$u = \frac{v + w}{1 + \frac{v\,w}{c^2}}.$$

Die Transformation von *S* auf *S''* kann dann einfach so vorgenommen werden, dass man in den Transformationsgleichungen *v* durch *u* ersetzt. Man gelangt zum selben Ergebnis, wenn man erst von *S* auf *S'* transformiert (mit $v = v$) und dann von *S'* auf *S''* (mit $v = w$), wie man durch eine etwas mühsame Rechnung bestätigen kann. Dieses Ergebnis bedeutet, dass die Transformationsgleichungen eine *Gruppe* im mathematischen Sinn bilden.

Elektrodynamischer Teil

§ 6 Transformation der Maxwellschen Gleichungen für den leeren Raum

Wir setzen voraus, dass im System S die Maxwellschen Gleichungen für den leeren Raum gelten:

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \qquad \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = 0, \qquad \mathrm{div}\,\boldsymbol{H} = 0.$$

Wir beschreiben die Feldvektoren $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ durch ihre Komponenten wie folgt:

$$\boldsymbol{E} = (E_x,\ E_y,\ E_z) = (X,\ Y,\ Z) \quad \text{und} \quad \boldsymbol{H} = (H_x,\ H_y,\ H_z) = (L,\ M,\ N).$$

Alle Komponenten und damit auch die Feldvektoren können Funktionen von x, y, z und t sein. Es ist nun

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.$$

In Komponentendarstellung lauten die Maxwellschen Gleichungen (mit vertauschten Seiten)

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, &\qquad \mu_0 \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y},\\
\varepsilon_0 \frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, &\qquad \mu_0 \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z},\\
\varepsilon_0 \frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, &\qquad \mu_0 \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen sollen nun in das System S' transformiert werden. Das geschieht im Prinzip so, dass die partiellen Ableitungen nach x, y, z und t durch solche nach x', y', z' und t' ersetzt werden. Dabei muss man berücksichtigen, dass im System S die Koordinaten x, y, z und t voneinander unabhängige Größen sind, nach denen die Feldstärkenkomponenten partiell differenziert werden können. In S' dagegen hängt die Zeitkoordinate t' nicht nur von t, sondern auch von x ab. Folglich gilt für die linke Seite der ersten Gleichung

$$\varepsilon_0 \frac{\partial X}{\partial t} = \varepsilon_0 \left(\frac{\partial X}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}\right),$$

und wegen

$$\frac{\partial x'}{\partial t} = -\beta v \quad \text{und} \quad \frac{\partial t'}{\partial t} = \beta \qquad \text{mit} \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

ist

$$\varepsilon_0 \frac{\partial X}{\partial t} = \varepsilon_0 \left(\frac{\partial X}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial t'}\right) = \varepsilon_0 \left(-\beta v \frac{\partial X}{\partial x'} + \beta \frac{\partial X}{\partial t'}\right).$$

Da *y* nur von *y'* abhängt, und *z* nur von *z'*, und

$$\frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\partial z'}{\partial z} = 1$$

ist, erhält man für die rechte Seite der Gleichung

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial N}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z} = \frac{\partial N}{\partial y'} - \frac{\partial M}{\partial z'}.$$

Diese Ergebnisse in die erste der sechs Gleichungen von oben eingesetzt, und diese dann geordnet, ergibt

$$\varepsilon_0 \beta \frac{\partial X}{\partial t'} = \varepsilon_0 \beta v \frac{\partial X}{\partial x'} + \frac{\partial N}{\partial y'} - \frac{\partial M}{\partial z'} \qquad (10)$$

Die Tatsache, dass im Vakuum das elektrische Feld quellenfrei und folglich

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0$$

ist (3. Maxwellsche Gleichung), kann man dazu nutzen, in dieser (und später auch in der vierten Gleichung) die partielle Ableitung von *X* nach *x'* durch solche nach *y'* und *z'* zu ersetzen und dadurch einen Vergleich einander entsprechender Gleichungen ermöglichen (siehe unten).

Die 3. Maxwellsche Gleichung lautet explizit

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial X}{\partial x} = -\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial z} \qquad (11)$$

Für die linke Seite der Gleichung (11) erhält man durch Einführung der neuen Koordinaten

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x} = \beta \frac{\partial X}{\partial x'} - \beta \frac{v}{c^2}\frac{\partial X}{\partial t'}.$$

Für die rechte Seite findet man

$$-\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial z} = -\frac{\partial Y}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z} = -\frac{\partial Y}{\partial y'} - \frac{\partial Z}{\partial z'}.$$

Einsetzen in (11) ergibt

$$\beta \frac{\partial X}{\partial x'} = \beta \frac{v}{c^2}\frac{\partial X}{\partial t'} - \frac{\partial Y}{\partial y'} - \frac{\partial Z}{\partial z'}$$

Dies wiederum in (10) eingesetzt ergibt nach einfachen Umformungen schließlich

$$\varepsilon_0 \frac{\partial X}{\partial t'} = \beta \frac{\partial \left(N - \varepsilon_0 v Y \right)}{\partial y'} - \beta \frac{\partial \left(M + \varepsilon_0 v Z \right)}{\partial z'}.$$

Ganz analog erhält man die übrigen fünf Gleichungen:

$$\varepsilon_0\beta\frac{\partial(Y-\mu_0 vN)}{\partial t'} = -\frac{\partial L}{\partial z'} - \beta\frac{\partial(N-\varepsilon_0 vY)}{\partial x'},$$

$$\varepsilon_0\beta\frac{\partial(Z+\mu_0 vM)}{\partial t'} = \beta\frac{\partial(M+\varepsilon_0 vZ)}{\partial x'} - \frac{\partial L}{\partial y'},$$

$$\mu_0\frac{\partial L}{\partial t'} = \beta\frac{\partial(Y-\mu_0 vN)}{\partial z'} - \beta\frac{\partial(Z+\mu_0 vM)}{\partial y'},$$

$$\mu_0\beta\frac{\partial(M+\varepsilon_0 vZ)}{\partial t'} = \beta\frac{\partial(Z+\mu_0 vM)}{\partial x'} - \frac{\partial X}{\partial z'},$$

$$\mu_0\beta\frac{\partial(N-\varepsilon_0 vY)}{\partial t'} = \frac{\partial X}{\partial y'} - \beta\frac{\partial(Y-\mu_0 vN)}{\partial x'}.$$

Das Prinzip der Gleichberechtigung aller Inertialsysteme fordert nun, dass die Maxwellschen Gleichungen auch im System *S'* gelten, wenn sie im System *S* gelten. Es muss demnach sein

$$\varepsilon_0\frac{\partial X'}{\partial t'} = \frac{\partial N'}{\partial y'} - \frac{\partial M'}{\partial z'}, \qquad \mu_0\frac{\partial L'}{\partial t'} = \frac{\partial Y'}{\partial z'} - \frac{\partial Z'}{\partial y'},$$

$$\varepsilon_0\frac{\partial Y'}{\partial t'} = \frac{\partial L'}{\partial z'} - \frac{\partial N'}{\partial x'}, \qquad \mu_0\frac{\partial M'}{\partial t'} = \frac{\partial Z'}{\partial x'} - \frac{\partial X'}{\partial z'},$$

$$\varepsilon_0\frac{\partial Z'}{\partial t'} = \frac{\partial M'}{\partial x'} - \frac{\partial L'}{\partial y'}, \qquad \mu_0\frac{\partial N'}{\partial t'} = \frac{\partial X'}{\partial y'} - \frac{\partial Y'}{\partial x'}.$$

Ein Vergleich der einander entsprechenden Terme in den beiden Gleichungssystemen ergibt

$$\frac{\partial X'}{\partial t'} = \frac{\partial X}{\partial t'}, \qquad \frac{\partial Y'}{\partial t'} = \beta\frac{\partial(Y-\mu_0 vN)}{\partial t'}, \quad \text{usw.}$$

Daraus folgt durch Integration

$$X' = X + C_1, \qquad Y' = \beta(Y-\mu_0 vN) + C_2, \quad \text{usw.}$$

Die Integrationskonstanten sind die entsprechenden Komponenten eines homogen, zeitlich konstanten Feldes, das im System *S'* dem veränderlichen elektromagnetischen Feld überlagert ist. Einem solchen Feld aber würde auch im System *S* ein homogenes, konstantes Feld (wenn auch evtl. mit anderer Feldstärke) entsprechen. Von einem solchen Feld aber haben wir von Anfang an abgesehen, weil es in den Maxwellschen Gleichungen ohnehin keine Rolle spielen würde. Also setzen wir sämtliche Integrationskonstanten gleich null und erhalten so

$$X' = X, \qquad L' = L,$$

$$Y' = \beta(Y-\mu_0 v N), \qquad M' = \beta(M+\varepsilon_0 v Z),$$

$$Z' = \beta(Z+\mu_0 v M), \qquad N' = \beta(N-\varepsilon_0 v Y).$$

Im System *S'* existieren also im Allgemeinen andere Felder als in *S*. Im Einzelnen:

1. Die *X*-Komponente der elektrischen Feldstärke hat in *S* und *S'* denselben Wert.
2. Dasselbe gilt für die *X*-Komponente *L* der magnetischen Feldstärke.

3. Die Y-Komponente der elektrischen Feldstärke in S' hängt außer von Y auch von N ab. Selbst wenn in S kein elektrisches Feld existiert, kann in S' eines vorhanden sein, nämlich dann, wenn es in S ein entsprechende Magnetfeld gibt.
4. Analoges gilt für die Z-Komponente der elektrischen Feldstärke in S'.

Und so weiter.

§ 7 Dopplersches Prinzip und Aberration

Die betrachteten Bezugssysteme sollen von einer elektromagnetischen Welle durchlaufen werden, die von einer von den Ursprüngen O und O' der Systeme sehr weit entfernten Quelle ausgeht. Dann kann die Welle in der Umgebung der Ursprünge als eben angesehen werden. Die Welle besteht aus einem elektrischen und aus einem magnetischen Feld; die Feldstärkevektoren können in Vektoreichungen dargestellt werden:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \sin \boldsymbol{\Phi}, \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 \sin \boldsymbol{\Phi}.$$

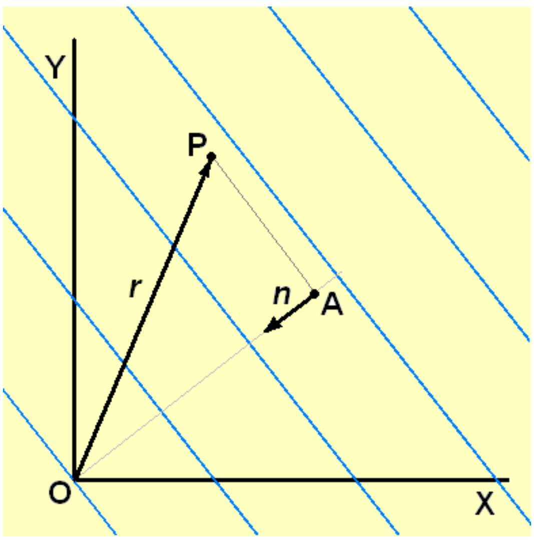
Die Komponentendarstellung der Felder ist dann (mit denselben Bezeichnungen wie im letzten Paragraphen)

$$\begin{aligned} X &= X_0 \sin \Phi, & L &= L_0 \sin \Phi, \\ Y &= Y_0 \sin \Phi, & M &= M_0 \sin \Phi, \\ Z &= Z_0 \sin \Phi, & N &= N_0 \sin \Phi. \end{aligned}$$

Dabei ist Φ der orts- und zeitabhängige Phasenwinkel im Punkt $P(x, y, z)$ zur Zeit t, für den gilt

$$\Phi = \omega\left(t - \frac{ax + by + cz}{c_0}\right), \qquad (12)$$

wenn zur Zeit $t = 0$ im Ursprung O $\Phi = 0$ ist. Dabei ist ω die Kreisfrequenz der Welle ($\omega = 2\,\pi\,f$). In der folgenden Abbildung ist zur Vereinfachung angenommen, dass die Frontebenen der Welle (blaue Linien) auf der XY-Ebene senkrecht stehen.



Der Einheitsvektor der Wellenfrontnormalen sei $\boldsymbol{n} = (a, b, c) = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$. Der Betrag des Skalarprodukts $\boldsymbol{r}\,\boldsymbol{n} = ax + by + cz$ ist gleich der Länge der senkrechten Projektion von $\boldsymbol{r}$ auf $\boldsymbol{n}$, also gleich der Strecke *OA*. Der Quotient

$$\frac{ax+by+cz}{c_0}$$

(c_0 = Vakuum-Lichtgeschwindigkeit) ist die Laufzeit der Welle von *O* nach *A*. Im abgebildeten Fall ist diese negativ, da $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{n}$ einen stumpfen Winkel bilden und der Punkt *A* von der Welle früher erreicht wird als *O*.

Es soll nun untersucht werden, welche Eigenschaften diese Wellen im Systems *S'* haben. Durch Übernahme der Ergebnisse aus § 6 erhalten wir für die Komponenten der Feldstärken

$$\begin{aligned} X' &= X_0 \sin\Phi, & L' &= L_0 \sin\Phi, \\ Y' &= \beta\left(Y_0 - \mu_0 v N_0\right)\sin\Phi, & M' &= \beta\left(M_0 + \varepsilon_0 v Z_0\right)\sin\Phi, \\ Z' &= \beta\left(Z + \mu_0 v M_0\right)\sin\Phi, & N' &= \beta\left(N - \varepsilon_0 v Y\right)\sin\Phi. \end{aligned}$$

Für den (unveränderten) Phasenwinkel gilt im System *S'*

$$\Phi = \omega'\left(t' - \frac{a'x' + b'x' + c'z'}{c_0}\right). \qquad (13)$$

Die in dieser Gleichung auftretenden Konstanten finden wir durch folgende Überlegung: Wir gehen von Gleichung (12) aus und transformieren mit den Gleichungen (A) bis (E) die Koordinaten *x, y, z* und *t*. Dadurch erhalten wir

$$\begin{aligned} \Phi &= \omega\left(\beta t' + \beta\frac{v}{c_0^2}x' - \frac{a\beta\left(x' + vt'\right) + b\,y' + c\,z'}{c_0}\right) \\ &= \beta\omega\left[t'\left(1 - \frac{a\,v}{c_0}\right) - \frac{1}{c_0}x'\left(a - \frac{v}{c_0}\right) + \frac{b}{\beta c_0}y' + \frac{c}{\beta c_0}z'\right]. \end{aligned}$$

Um diese Gleichung mit Gleichung (13) vergleichen zu können, nehmen wir eine weitere Umformung vor:

$$\Phi = \beta\omega\left(1 - \frac{a\,v}{c_0}\right)\left[t' - \frac{x'\left(a - \frac{v}{c_0}\right) + \frac{b}{\beta}y' + \frac{c}{\beta}z'}{1 - \frac{a\,v}{c_0}}\right].$$

Nun ergibt der Vergleich einander entsprechender Terme und Koeffizienten:

$$\omega' = \beta\left(1 - \frac{a\,v}{c_0}\right)\omega, \qquad a' = \frac{a - \frac{v}{c_0}}{1 - \frac{a\,v}{c_0}}, \qquad b' = \frac{b}{\beta\left(1 - \frac{a\,v}{c_0}\right)}, \qquad c' = \frac{c}{\beta\left(1 - \frac{a\,v}{c_0}\right)}.$$

Interessant ist vor allem die erste dieser vier Gleichungen, welche die Kreisfrequenz betrifft. Kürzt man sie durch $2\,\pi$, so erhält man eine Aussage über die Frequenzen in beiden Systemen:

$$f' = f\,\frac{1-\frac{a\,v}{c_0}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c_0^2}}} = f\,\frac{1-\frac{v}{c_0}\cos\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c_0^2}}}. \qquad (14)$$

Dabei ist (siehe oben nach der Abbildung) $a = \cos\alpha$ der erste Richtungskosinus. Für $\alpha = 0$ ist $\cos\alpha = 1$ und wegen

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

muss $\cos\beta = \cos\gamma = 0$ und $\beta = \gamma = 90°$ sein. Die Welle breitet sich dann in Richtung der X-Achse aus, und die Gleichung (14) vereinfacht sich zu

$$f' = f\,\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c_0}}{1+\frac{v}{c_0}}}.$$

Für v gegen $-c_0$ geht die Frequenz gegen unendlich.

Aus der Gleichung

$$a' = \frac{a-\frac{v}{c_0}}{1-\frac{a\,v}{c_0}}$$

folgt mit

$$a' = \cos\alpha' \quad \text{und} \quad a = \cos\alpha$$

(erster Richtungskosinus in S' bzw. in S)

$$\cos\alpha' = \frac{\cos\alpha - \frac{v}{c_0}}{1-\frac{v}{c_0}\cos\alpha}.$$

Diese Gleichung ist das Aberrationsgesetz in seiner allgemeinsten Form. Für $\alpha = \pi/2$ (Lichteinfall in S senkrecht von oben) erhält man für den Einfallwinkel in S'

$$\cos\alpha' = -\frac{v}{c_0}.$$

Für v = 30 km/s (Umlaufsgeschwindigkeit der Erde) und c_0 = 300 000 km/s ergibt sich der aus der Astronomie bekannte Wert α' = 20,5''.

Schließlich bleibt noch zu untersuchen, welchen Wert die Amplitude der Welle im System S' hat. Dazu betrachten wir einen Lichtstrahl, der in der XY-Ebene verläuft und mit der X-Achse den Winkel α bildet. Der Lichtstrahl sei linear polarisiert, und zwar so, dass der elektrische Feldvektor $\boldsymbol{E}$ in der XY-Ebene schwingt, der magnetische Feldvektor $\boldsymbol{H}$ parallel zur Z-Achse. Die Amplitude der elektrischen Feldstärke sei E_0, die der magnetischen Feldstärke sei H_0. Da die magnetische Feldstärke parallel zur Z-Achse verläuft, ist mit der oben verwendeten Bezeichnung $H_0 = N_0$.

Wir zerlegen E_0 in die Komponenten X_0 und Y_0 (siehe Abbildung auf der nächsten Seite). Es ist

$$X_0 = E_0 \sin\alpha, \quad Y_0 = E_0 \cos\alpha \quad \text{und} \quad E_0^2 = X_0^2 + Y_0^2 .$$

Im System S' ist

$$E'^2_0 = X'^2_0 + Y'^2_0 = X_0^2 + \beta^2 \left(Y_0 - \mu_0 v N_0\right)^2 = E_0^2 \sin^2\alpha + \beta^2 \left(E_0 \cos\alpha - \mu_0 v N_0\right)^2 .$$

Wegen der Umformung von X'_0 und Y'_0 siehe die Gleichungen am Ende des § 6 auf S. 12 oben. Bei einer elektromagnetischen Welle ist $H_0 = c\varepsilon_0 E_0$ und daher

$$E'^2_0 = E_0^2 \sin^2\alpha + \beta^2 \left(E_0 \cos\alpha - \mu_0 v c \varepsilon_0 E_0\right)^2$$

und

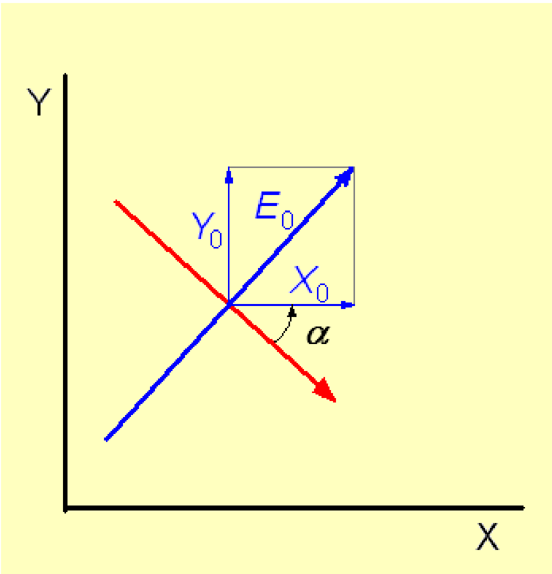
$$\left(\frac{E'_0}{E_0}\right) = \sin^2\alpha + \beta^2 \left(\cos\alpha - \varepsilon_0\mu_0 c v\right)^2 = \frac{\sin^2\alpha \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \left(\cos\alpha - \varepsilon_0\mu_0 c v\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} .$$

Nach einigen weiteren Umformungen und mit $\varepsilon_0\, \mu_0 = 1/c^2$ ergibt sich schließlich

$$\left(\frac{E'_0}{E_0}\right)^2 = \frac{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\alpha\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

und für $\alpha = 0$

$$\left(\frac{E'_0}{E_0}\right)^2 = \frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}} .$$



Zum gleichen Ergebnis kommt man, wenn die Polarisationsrichtung um 90° gedreht ist, sodass der elektrische Feldvektor parallel zur Z-Achse schwingt. Bei beliebiger Polarisationsrichtung kann die

Welle in zwei Teilwellen zerlegt werden, welche die eben behandelten Polarisationsrichtungen haben. Das Ergebnis gilt also allgemein.

§ 8 Transformation der Energie elektromagnetischer Wellen. Theorie des Strahlungsdrucks.

Im ersten Teil wird untersucht, wie sich die elektromagnetische Energie verhält, die in einem Raumstück vorhanden ist, das von einer geschlossenen Fläche umfasst wird, wenn man vom System *S* zum System S' übergeht.

Die Bewegungsrichtung der Welle im System *S* werde wieder beschrieben durch die Richtungskosinus *a, b, c* der Wellennormalen ***n***. Wir betrachten nun eine Kugel vom Radius *R*, deren Mittelpunkt sich zur Zeit $t = 0$ in *O* befindet und die sich mit Lichtgeschwindigkeit c_0 in Richtung ***n*** bewegt. Die Gleichung der Kugelfläche ist dann

$$(x - c_0 a t)^2 + (y - c_0 b t)^2 + (z - c_0 c t)^2 = R^2.$$

Diese mit der Welle mitbewegte Kugel enthält jederzeit dieselbe Energiemenge wie zur Zeit $t = 0$. Wir berechnen nun das Volumen, das diese Kugel im System *S'* zur Zeit $t' = 0$ hat. Durch Transformation der in der Kugelgleichung auftretenden Größen in das System *S*' ergibt sich

$$\left(\beta x' - a\beta \frac{v}{c_0} x'\right)^2 + \left(y' - b\beta \frac{v}{c_0} x'\right)^2 + \left(z' - c\beta \frac{v}{c_0} x'\right) = R^2 .$$

Dies ist die Gleichung eines Ellipsoids. Für $x' = 0$ erhält man die Gleichung der Schnittkurve des Ellipsoids mit der *Y'Z'*-Ebene:

$$y'^2 + z'^2 = R^2 ,$$

die Gleichung eines Kreises mit dem Radius *R*. Für einen beliebigen konstanten Wert von *x*' ergibt sich die Gleichung des Schnittkreises des Ellipsoids mit der Ebene x' = konst.:

$$\left(y' - b\beta \frac{v}{c_0} x'\right)^2 + \left(z' - c\beta \frac{v}{c_0} x'\right) = R^2 - \left(\beta x' - a\beta \frac{v}{c_0} x'\right)^2 .$$

Für dessen Radius *r* gilt:

$$r^2 = R^2 - \left(\beta x' - a\beta \frac{v}{c_0} x'\right)^2 = R^2 - \beta^2 x'^2 \left(1 - \frac{av}{c_0}\right).$$

Der Radius r wird null in dem am weitesten links und in dem am weitesten rechts gelegenen Punkt des Ellipsoids. Für diese Punkte gilt demnach

$$x'_{1,2} = \mp \frac{R}{\beta\left(1 - \frac{av}{c_0}\right)}.$$

Ersetzt man entsprechend dem Satz von Cavalieri das gegeben Ellipsoid durch ein volumengleiches Rotationsellipsoid (siehe Abbildung) mit den Halbachsen

$$r_1 = r_2 = R \text{ und } r_3 = \frac{R}{\beta\left(1 - \frac{a\,v}{c_0}\right)},$$

so ergibt sich das Volumen zu

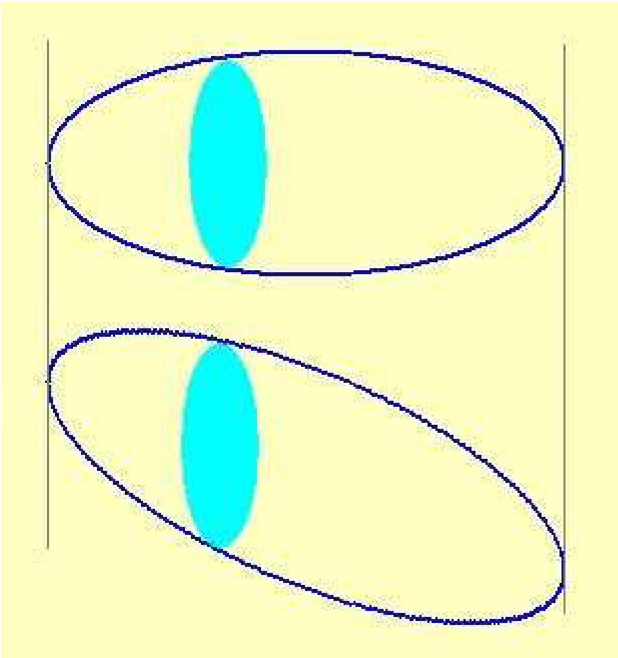
$$V' = \frac{4\pi}{3} r_1 r_2 r_3 = \frac{4\pi R^3}{3\beta\left(1 - \frac{a\,v}{c_0}\right)}.$$

Mit $a = \cos\alpha$ und

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

erhält man

$$\frac{V'}{V} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}}{1 - \frac{v}{c_0}\cos\alpha}.$$



Die mittlere Energiedichte w einer elektromagnetischen Welle ist proportional dem Quadrat der Amplitude des elektrischen (und des magnetischen) Feldes. Für das Verhältnis der im betrachteten Raumstück enthaltenen Energie in *S* und *S´* gilt*:*

$$\frac{W'}{W} = \frac{k\,E'^2_0\,V'}{k\,E_0^2\,V} = \frac{\left(1 - \frac{v}{c_0}\cos\alpha\right)^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}}{\left(1 - \frac{v^2}{c_0^2}\right)\left(1 - \frac{v}{c_0}\cos\alpha\right)} = \frac{\left(1 - \frac{v}{c_0}\cos\alpha\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c_0^2}}}.$$

Diese Gleichung geht für $\alpha = 0$ über in

$$\frac{W'}{W}=\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c_0}}{1+\frac{v}{c_0}}}.$$

Nun kommen wir zum zweiten Teil, zur Theorie des Strahlungsdrucks.

Die Ebene *x*’ = 0 des Bezugssystems *S*’ sei eine vollkommen spiegelnde Fläche, an der die im § 6 betrachteten elektromagnetischen Wellen reflektiert werden. Gesucht sind der auf die spiegelnde Fläche ausgeübte Lichtdruck, die Richtung, die Frequenz und die Intensität des Lichts nach der Reflexion. Das einfallende Licht sei durch die Amplitude *A* des elektrischen (oder auch des magnetischen) Feldes, durch den Winkel α und durch seine Frequenz *f* gekennzeichnet. Im System *S*’ sind die entsprechenden Größen dann

$$A'=A\frac{1-\frac{v}{c}\cos\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

$$\cos\alpha'=\frac{\cos\alpha-\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}\cos\alpha},$$

$$f'=f\frac{1-\frac{v}{c}\cos\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Wenn wir den Vorgang der Reflexion im System *S*’ betrachten, erhalten wir für das reflektierte Licht

$$A''=A',$$
$$\cos\alpha''=-\cos\alpha',$$
$$f''=f'.$$

Durch Rücktransformieren auf das System *S* (wobei beim jeweils ersten Schritt in den oben stehenden Formeln lediglich v durch –v zu ersetzen ist) erhält man für das reflektierte Licht

$$A'''=A''\frac{1+\frac{v}{c}\cos\alpha''}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=A'\frac{1-\frac{v}{c}\cos\alpha'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=A\frac{1-\frac{v}{c}\cos\alpha}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\frac{1-\frac{v}{c}\frac{\cos\alpha-\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}\cos\alpha}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$
$$=A\frac{1-\frac{v}{c}\cos\alpha-\frac{v}{c}\cos\alpha+\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}=A\frac{1-2\frac{v}{c}\cos\alpha+\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

$$\cos\alpha''' = \frac{\cos\alpha'' + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}\cos\alpha''} = \frac{-\cos\alpha' + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}\cos\alpha'} = \frac{-\frac{\cos\alpha - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}\cos\alpha} + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}\frac{\cos\alpha - \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}\cos\alpha}} = -\frac{\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)\cos\alpha - 2\frac{v}{c}}{1 - 2\frac{v}{c}\cos\alpha + \frac{v^2}{c^2}},$$

$$f''' = f''\frac{1 + \frac{v}{c}\cos\alpha''}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = f\frac{1 - 2\frac{v}{c}\cos\alpha + \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v}{c}\right)^2}.$$

Die (mittlere) Energiedichte einer elektromagnetischen Welle ist $w = \varepsilon_0 E^2 = \mu_0 H^2$, wobei E und H die Amplituden der Felder sind. Vom System S aus gesehen ist die Horizontalkomponente der Geschwindigkeit der Welle gegenüber dem Spiegel

$$v_h = c\cos\alpha - v.$$

Die im Zeitintervall Δt auf die Spiegelfläche A_S treffende Lichtenergie ist daher

$$\Delta W = \varepsilon_0 E^2 \left(c\cos\alpha - v\right) A_S \Delta t,$$

die flächen- und zeitbezogene Energie, also die flächenbezogene Leistung ist

$$\frac{P}{A_S} = \frac{\Delta W}{A_S \Delta t} = \varepsilon_0 E^2 \left(c\cos\alpha - v\right) = \varepsilon_0 E^2 c\left(\cos\alpha - \frac{v}{c}\right).$$

Für die reflektierte flächenbezogene Leistung gilt entsprechend

$$\frac{P_r}{A_S} = \varepsilon_0 \left(E'''\right)^2 \left(-c\cos\alpha''' + v\right) = \varepsilon_0 \left(E'''\right)^2 c\left(\cos\alpha''' + \frac{v}{c}\right).$$

Die Differenz dieser beiden Größen ist die auf den Spiegel übertragene flächenbezogenen Leistung:

$$\frac{P - P_r}{A_S} = \frac{F\,v}{A_S} = p\,v,$$

wobei F die auf den Spiegel ausgeübte Kraft und p der Druck auf den Spiegel ist. Durch die oben beschriebenen Transformationen findet man schließlich

$$p = 2\varepsilon_0 E^2 \frac{\left(\cos\alpha - \frac{v}{c}\right)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

In erster Näherung (d. h. für kleine Geschwindigkeiten) ergibt sich daraus – in Übereinstimmung mit der Erfahrung und anderen Theorien – der Wert

$$p = \varepsilon_0 E^2 \cos^2\alpha.$$

Nach der hier an einigen Beispielen gezeigten Methode können alle Probleme der Optik bewegter Körper gelöst werden. Das Wesentliche dabei ist, dass die auftretenden elektrischen und magnetischen

Felder, die durch einen bewegten Körper beeinflusst werden, auf ein relativ zu dem Körper ruhendes Bezugssystem transformiert werden. Dadurch lässt sich jedes Problem der Optik bewegter Körper auf eine Reihe von Problemen der Optik ruhender Körper zurückführen.

§ 9 Transformation der Maxwellschen Gleichungen mit Berücksichtigung der Konvektionsströme

Wir nehmen an, dass in dem betrachteten Raumstück bewegliche elektrische Ladungen vorhanden sind, die quasi kontinuierlich (aber nicht notwendig gleichmäßig) im Raum verteilt seien. Diese Raumladungen mit der Raumladungsdichte

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV}$$

bewirken zweierlei:

1. Sie sind Quellen eines elektrischen Feldes, für das gilt:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

2. Sie stellen, wenn sie sich bewegen, elektrische Ströme (»Konvektionsströme«) im Raum dar. Für die Stromdichte $\boldsymbol{j}$ dieser Ströme gilt, wenn $\boldsymbol{u}$ die Geschwindigkeit der Ladung an der betreffenden Stelle ist

$$\boldsymbol{j} = \rho\, \boldsymbol{u}.$$

Damit lautet die 1. Maxwellsche Gleichung

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \rho\, \boldsymbol{u} + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t},$$

und in Komponentenform

$$\begin{aligned}
\rho u_x + \varepsilon_0 \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}, \quad & \mu_0 \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y},\\
\rho u_y + \varepsilon_0 \frac{\partial Y}{\partial y} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}, \quad & \mu_0 \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z},\\
\rho u_z + \varepsilon_0 \frac{\partial Z}{\partial z} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}, \quad & \mu_0 \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Die Transformation auf das Systems S' zeige ich beispielhaft an der ersten Gleichung und verweise zur Abkürzung auf den Rechengang in § 6. Zunächst werden wieder die partiellen Ableitungen nach *t*, *y* und *z* durch solche nach *t*', *x*', *y*' und *z*' ersetzt. Dadurch erhält man zunächst (s. Gleichung (1) auf S. 10)

$$\rho u_x + \varepsilon_0 \left(\frac{\partial X}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} \right) = \frac{\partial N}{\partial y'} - \frac{\partial M}{\partial z'},$$

$$\rho u_x + \varepsilon_0 \left(-\beta v \frac{\partial X}{\partial x'} + \beta \frac{\partial X}{\partial t'} \right) = \frac{\partial N}{\partial y'} - \frac{\partial M}{\partial z'}. \quad (14)$$

Zur Eliminierung von

$$\frac{\partial X}{\partial x'}$$

bilden wir zunächst

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \beta \frac{\partial X}{\partial x'} - \beta \frac{v}{c^2} \frac{\partial X}{\partial t'}$$

und setzen dies in die Divergenzgleichung

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

ein. Das ergibt

$$\beta \frac{\partial X}{\partial x'} - \beta \frac{v}{c^2} \frac{\partial X}{\partial t'} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \frac{\partial Y}{\partial y'} - \frac{\partial Z}{\partial z'},$$

woraus folgt

$$\beta \frac{\partial X}{\partial x'} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \beta \frac{v}{c^2} \frac{\partial X}{\partial t'} - \frac{\partial Y}{\partial y'} - \frac{\partial Z}{\partial z'}.$$

Dies in Gleichung (5) eingesetzt ergibt

$$\rho u_x + \varepsilon_0 \left(-v \frac{\rho}{\varepsilon_0} - \beta \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial X}{\partial t'} + v \frac{\partial Y}{\partial y'} + v \frac{\partial Z}{\partial z'} + \beta \frac{\partial X}{\partial t'} \right) = \frac{\partial N}{\partial y'} - \frac{\partial M}{\partial z'},$$

$$\rho (u_x - v) + \varepsilon_0 \beta \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\partial X}{\partial t'} = \frac{\partial (N - \varepsilon_0 v Y)}{\partial y'} - \frac{\partial (M + \varepsilon_0 v Z)}{\partial z'}$$

und nach Multiplikation mit β

$$\rho \beta (u_x - v) + \varepsilon_0 \frac{\partial X}{\partial t'} = \beta \frac{\partial (N - \varepsilon_0 v Y)}{\partial y'} - \beta \frac{\partial (M + \varepsilon_0 v Z)}{\partial z'}.$$

Wegen der Gleichberechtigung der Systeme lautet die entsprechende Gleichung in *S'*:

$$\rho' u_{x'} + \varepsilon_0 \frac{\partial X'}{\partial t'} = \frac{\partial N'}{\partial y'} - \frac{\partial M'}{\partial z'}.$$

Berücksichtigt man, dass nach dem Additionstheorem der Geschwindigkeit

$$u_{x'} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}$$

ist, so muss

$$\rho\beta\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right) = \rho'$$

sein, oder

$$\rho' = \frac{1 - \frac{u_x v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\rho.$$

Ferner ist (von Integrationskonstanten abgesehen, denen konstante Felder entsprechen würden)

$$X' = X, \quad N' = \frac{N - \varepsilon_0 v Y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad M' = \frac{M + \varepsilon_0 v Z}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Analog findet man die übrigen beiden Gleichungen:

$$u_{y'}\rho' + \varepsilon_0\beta\frac{\partial\left(Y - \mu_0 v N\right)}{\partial t'} = \frac{\partial L}{\partial z'} - \beta\frac{\partial\left(N - \varepsilon_0 v Y\right)}{\partial},$$
$$u_{z'}\rho' + \varepsilon_0\beta\frac{\partial\left(Z + \mu_0 v M\right)}{\partial t'} = \beta\frac{\partial\left(M + \varepsilon_0 v Z\right)}{\partial x'} - \frac{\partial L}{\partial y'}.$$

Ein Vergleich mit den entsprechenden Maxwellschen Gleichungen für das System S’ ergibt:

$$\begin{aligned} X' &= X, & L' &= L, \\ Y' &= \beta\left(Y - \mu_0 v N\right), & M' &= \beta\left(M + \varepsilon_0 v Z\right), \\ Z' &= \beta\left(Z + \mu_0 v M\right), & N' &= \beta\left(N - \varepsilon_0 v Y\right). \end{aligned}$$

Die übrigen drei Gleichungen (die das 2. Maxwellsche Gesetz betreffen) sind identisch mit den früher für das Vakuum gefunden Gleichungen.

Aus der oben für die Raumladungsdichte gefundenen Transformationsgleichung lässt sich ein wichtiger Satz ableiten:

Im System *S* ruhe eine Kugel vom Radius *r*. Sie umschließe eine elektrische Ladung mit der konstanten Raumladungsdichte ρ. Die umschlossene Ladung ist dann

$$Q = \frac{4}{3}\pi r^3\rho.$$

Für einen Beobachter in *S’* ist diese Kugel ein Rotationsellipsoid, dessen in Bewegungsrichtung liegende Halbachse die Länge

$$r' = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, r$$

hat. Dieses Rotationsellipsoid hat für einen Beobachter in *S'* das Volumen

$$V' = \frac{4}{3}\pi r^3 \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Die Raumladungsdichte ist für diesen Beobachter (wegen $w_x = 0$)

$$\rho' = \frac{\rho}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Die von der Kugel umschlossene Ladung ist daher für den Beobachter in *S'*

$$Q' = V'\rho' = \frac{4}{3}\pi r^3 = Q.$$

Das bedeutet: Die elektrische Ladung eines Körpers ist von der Relativgeschwindigkeit des Beobachters unabhängig. Die elektrische Ladung ist eine »absolute Größe«.

§ 10 Dynamik des (langsam beschleunigten) Elektrons

In einem elektromagnetischen Feld bewege sich ein punktförmiges, mit einer elektrischen Ladung *e* versehenes Teilchen (im Folgenden »Elektron« genannt), dessen Bewegungsablauf untersucht werden soll.

Ruht das Elektron zu einem bestimmten Zeitpunkt, so wird der Zusammenhang zwischen seiner Masse μ, seiner Ladung *e*, der Komponenten der elektrischen Feldstärke und seiner Beschleunigung durch folgende Gleichungen beschrieben:

$$\mu \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = eX,$$

$$\mu \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = eY,$$

$$\mu \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = eZ.$$

Besitzt das Elektron dagegen zu einem bestimmten Zeitpunkt $t = 0$ die Geschwindigkeit *v* in Richtung der +*X*-Achse, dann befindet es sich in dem oben beschriebenen Bezugssystem *S'* in Ruhe. Dann lauten seine Bewegungsgleichungen in *S'* in diesem Augenblick:

$$\mu \frac{d^2 x'}{dt'^2} = e\,X',$$

$$\mu \frac{d^2 y'}{dt'^2} = eY',$$

$$\mu \frac{d^2 z'}{dt'^2} = e\,Z'.$$

Unter der bei der Herleitung der Transformationsgleichungen gemachten Annahmen können wir diese Gleichungen auf das System *S* unter Benutzung der folgenden Beziehungen transformieren:

$$\begin{array}{ll} t' = \beta\left(t - \frac{v}{c^2}\,x\right), & \\ x' = \beta(x - v\,t) & X' = X, \\ y' = y, & Y' = \beta(Y - \mu_0 v\,N), \\ z' = z, & Z' = \beta(Z + \mu_0 v\,M). \end{array}$$

Außerdem – und vor allem – werden die zwei Additionstheoreme für Geschwindigkeiten benötigt, aus denen Additionstheoreme für die Beschleunigungen gewonnen werden:

1. Aus

$$w_x = \frac{v + w_{x'}}{1 + \frac{v\,w_{x'}}{c^2}}$$

folgt für die Beschleunigung

$$a_x = \frac{dw_x}{dt} = \frac{\frac{dw_{x'}}{dt}\left(1 + \frac{v\,w_{x'}}{c^2}\right) - (v + w_{x'})\frac{v}{c^2}\frac{dw_{x'}}{dt}}{\left(1 + \frac{v\,w_{x'}}{c^2}\right)}$$

und mit $w_{x'} = 0$

$$a_x = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{dw_{x'}}{dt} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{dw_{x'}}{dt'}\frac{dt'}{dt} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} a_{x'}\,,$$

wegen

$$\frac{dt'}{dt} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \text{und} \quad \frac{dw_{x'}}{dt'} = a_{x'}\,.$$

2. Aus dem Additionstheorem für w_y folgt mit $w_{x'} = 0$

$$w_y = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,w_{y'} \quad \Rightarrow \quad \frac{dw_y}{dt} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,\frac{dw_{y'}}{dt'}\frac{dt'}{dt}$$

und schließlich

$$a_y = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) a_{y'} .$$

Analog findet man

$$a_z = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) a_{z'} .$$

Dass die Transformationsgleichungen für ax und ay bzw. az sich unterscheiden, leuchtet unmittelbar ein. Die »transversale Beschleunigung« des Elektrons (das ist die Beschleunigung senkrecht zur Bewegungsrichtung) ist im System *S* kleiner als in *S'*, weil die Uhr des Beobachters in *S* für ihn schneller geht als eine in *S'* ruhende Uhr. Wegen der zweimaligen Differentiation tritt der Faktor *ß* zweimal auf. Das gilt auch für die »longitudinale Beschleunigung« (das ist die Beschleunigung in Bewegungsrichtung), jedoch tritt hier der Faktor ß noch ein drittes Mal auf, weil die Geschwindigkeit des Elektrons in S wegen der relativistischen Addition der Geschwindigkeiten langsamer wächst als in *S'*. Es ist also:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x'}{\mathrm{d}t'^2} = \beta^3 \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 y'}{\mathrm{d}t'^2} = \beta^2 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 z'}{\mathrm{d}t'^2} = \beta^2 \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}.$$

So erhält man schließlich die transformierten Bewegungsgleichungen:

$$\mu \beta^3 \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = e X ,$$

$$\mu \beta \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = e\left(Y - \mu_0 v N\right),$$

$$\mu \beta \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = e\left(Z + \mu_0 v M\right).$$

Betrachten wir zunächst die erste Gleichung. Wenn wir annehmen, dass das Elektron auch im System *S* die Ladung *e* hat, was durch frühere Betrachtungen gerechtfertigt ist, und ferner annehmen, dass die Gleichung »Kraft = Ladung mal Feldstärke« auch für bewegte Elektronen gilt, dann ist *e X* die in *S* auf das Elektron in Richtung der *X*-Achse wirkende Kraft. Setzen wir ferner die Gültigkeit des dynamischen Grundgesetzes in der Form »Kraft = Masse mal Beschleunigung« auch für einen bewegten Körper voraus, dann hat das Elektron im System *S* gegenüber Beschleunigung in *X*-Richtung eine Trägheit, die der Masse

$$m_X = \beta^3 \mu = \frac{\mu}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$

entspricht.

Aus der zweiten und dritten Gleichung folgt analog

$$m_y = m_z = \beta \mu = \frac{\mu}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\mu}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}.$$

Diese Ergebnisse waren damals bereits aus Messungen an schnell bewegten Elektronen bekannt. Die beiden Massen wurden als »longitudinale Masse« und »transversale Masse« bezeichnet. Später setzte sich die Erkenntnis durch, dass ein Körper nicht drei verschiedene Massen besitzt, sondern dass die verschiedenen Werte durch die Trägheit der kinetischen Energie des Körpers zustande kommen. Darüber später mehr.

Bei der Beschleunigung entzieht das Elektron dem elektrischen Feld Energie

$$W = \int_0^{x_1} e\,X\,\mathrm{d}\,x.$$

Erfolgt die Beschleunigung sehr langsam, gibt das Elektron keine Energie in Form von Strahlung ab, und die dem Feld entzogene Energie geht auf das Elektron als kinetische Energie über. Da während des ganzen Vorgangs die erste der oben stehende Bewegungsgleichungen gilt, ist

$$E_{\mathrm{kin}} = \int_0^{x_1} e\,X\,\mathrm{d}x = \int_0^{x_1} \beta^3 \mu \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x = \mu \int_0^{v} \beta^3 v\,\mathrm{d}v = \mu\,c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right].$$

Schreibt man diese Gleichung in der Form

$$E_{\mathrm{kin}} = c^2 \left[\frac{\mu}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \mu\right] = c^2 \left(m_x - \mu\right),$$

so steht in der Klammer die Differenz zwischen der transversalen Masse und der Masse μ des Elektrons. Deutet man diese Differenz als die Masse m_E der kinetischen Energie, so erhält man

$$m_E = \frac{E_{\mathrm{kin}}}{c^2} \quad \text{oder} \quad E_{\mathrm{kin}} = m_E\,c^2.$$

Alternative: Setzt man die Gleichung $E = m\,c^2$ (die Einstein im Herbst 1905 veröffentlichte) als bekannt voraus, dann liegt die Deutung nahe, dass die transversale Masse gleich der Summe aus der (unveränderlichen) Masse des Elektrons und der Masse seiner kinetischen Energie ist.

Der Unterschied zwischen der transversalen Masse und der longitudinalen Masse beruht darauf, dass bei transversaler Beschleunigung sich die Geschwindigkeit des Elektrons (und damit auch seine kinetische Energie) sich nicht ändert. (Transversale Beschleunigungen laufen ohne Energieaufwand ab.) Bei longitudinaler Beschleunigung dagegen wachsen die Geschwindigkeit, die kinetische Energie des Elektrons und damit auch die Masse der Energie. Dies äußert sich in einer vergrößerten Trägheit. (Siehe dazu Spezielle Relativitaetstheorie, Anmerkungen I.pdf)

Weitere Informationen hier.