# Spezielle Relativitätstheorie, Anmerkungen II

## 1. Der Minkowski-Raum

Die Welt der klassischen Physik ist ein unendlicher dreidimensionaler euklidischer Raum, in dem eine für alle verbindliche absolute Zeit[1] gleichmäßig abläuft.

Diese anscheinend selbstverständliche Vorstellung einer »absoluten Zeit« (Newton) ist durch die Spezielle Relativitätstheorie als Illusion entlarvt worden. Wie kann es eine absolute Zeit geben, wenn schon das Prädikat »gleichzeitig« für zwei Ereignisse an verschiedenen Orten nicht mehr allgemein verbindlich ist? Die Grundgleichungen der Speziellen Relativitätstheorie, die so genannten Lorentz-Transformationen (siehe unten) zeigen in den Gleichungen 2 und 4 die Abhängigkeit der Zeit (des Zeitpunkts) von der Ortskoordinate *x* des Beobachters:

$$(1)\quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (2)\quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$(3)\quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (4)\quad t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Demnach gibt es eine enge Verknüpfung der Zeit mit dem Raum. Wie kommt es dazu? Und lässt sich diese Verknüpfung anschaulich und damit verständlich machen?

Einstein hat sich mit dieser Frage zunächst nicht beschäftigt; vielleicht, weil er mit anderen Problemen befasst war, vielleicht auch, weil er hier keinen »Handlungsbedarf« sah.

Immerhin war der Raum auch in der Speziellen Relativitätstheorie noch dreidimensional und euklidisch. (Daran änderte erst die Allgemeine Relativitätstheorie etwas.) Drei Jahre nach Einsteins Begründung der Speziellen Relativitätstheorie veröffentlichte Hermann Minkowski eine geniale Entdeckung, die ein tieferes Verständnis des Zusammenhangs von Raum und Zeit ermöglichte und die auf einer genaueren Analyse der Lorentz-Transformationen beruhte. Wenn man in diesen Gleichungen die Zeiten $t$ und $t'$ durch die Strecken $w = c\,t$ bzw. $w' = c\,t'$ ausdrückt (das sind die Strecken, die das Licht im Vakuum im Zeitintervall von 0 bis $t$ bzw. $t'$ zurücklegt), also

$$t = \frac{w}{c} \quad \text{und} \quad t' = \frac{w'}{c}$$

setzt, dann nehmen die Gleichungen folgende Gestalt an:

[1] Die seit Jahrtausenden andauernden Versuche der Philosophen zu erklären, was die Zeit ist, haben sich als unergiebig erwiesen – als philosophisches Wortgeklingel. »Zeit« als Phänomen sui generis lässt sich überhaupt nicht definieren – es sei denn operational, wie Einstein es tat, nämlich so: Zeit ist das, was wir mit Uhren messen.

$$(5)\quad x' = \frac{x - \frac{v}{c} w}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (6)\quad w' = \frac{w - \frac{v}{c} x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$(7)\quad x = \frac{x' + \frac{v}{c} w'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad (8)\quad w = \frac{w' + \frac{v}{c} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Außer einer gewissen formalen Vereinfachung der Gleichungen zeigt sich eine verblüffende Ähnlichkeit zwischen den nebeneinander stehenden Gleichungen: Wenn man einerseits *x'* und *w'* vertauscht und andererseits *x* und *w,* dann gehen die linken Gleichungen in die rechten über und umgekehrt. Außerdem erweist sich, dass der Term

$$x^2 + y^2 + z^2 - w^2$$

»invariant ist gegenüber Lorentz-Transformation«. Das bedeutet: Geht man auf ein anderes Bezugssystem über und wendet auf die in dem Term auftretenden Koordinaten die Lorentz-Transformation an, so bleibt der Wert des Terms unverändert. Es ist also

$$x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - (w')^2 ,$$

und zwar für jedes beliebige Inertialsystem *S*'.

Minkowski hat seinerzeit $ct = \mathrm{i}w$ (i = imaginäre Einheit) gesetzt, wodurch die Vorzeichen in obiger Gleichung sämtlich positiv werden. Die meisten Physiker lehnen dies jedoch ab, weil dadurch wesentliche Zusammenhänge verschleiert werden. Was soll auch eine imaginäre Größe in einer physikalischen Gleichung bedeuten?

Betrachtet man nun *w* als eine vierte Koordinate – was die Ähnlichkeit der entsprechenden Gleichungen nahe legt – dann kommt man zu einem vierdimensionalen Raum, in dem die Zeit nur noch indirekt vorkommt. Minkowski selbst nannte diesen Raum »die Welt«; heute heißt er Minkowski-Raum oder Minkowski-Welt. Tatsächlich ist er eine formal-abstrakte Abbildung der Welt, in welcher der Ort und die Zeit eines jeden Ereignisses (nicht das Ereignis selbst, wie oft gesagt wird!) durch vier räumliche Koordinaten *x, y, z, w* beschrieben werden. Und selbstverständlich ist die Minkowski-Welt ein vierdimensionaler Raum mit vier *räumlichen* Dimensionen (wie könnte es auch anders sein!) und nicht – wie ebenfalls regelmäßig behauptet wird - ein »Raum« mit drei räumlichen (Längen-)Dimensionen und einer zeitlichen Dimension. Dieser alte und schier nicht auszurottende Irrtum geht übrigens auf Minkowski selbst zurück. (Wie man auch aus Einsteins Arbeiten erkennen kann, war man damals im Umgang mit Dimensionen allgemein noch sehr großzügig, um nicht zu sagen schlampig. Das hat sich zwar inzwischen geändert, aber der genannte Irrtum hat die Zeit überdauert.)

Der Minkowski-Raum hat besondere Eigenschaften:

1. Er besteht aus dem dreidimensionalen euklidischen Raum $R_3$ mit den Koordinaten *x, y, z*. Dies ist der Raum unserer täglichen Erfahrung, der Raum der klassischen Physik. Ich nenne ihn den Erfahrungsraum. Dieser bildet zusammen mit der vierten Dimension einen »pseudoeuklidischen Raum« $R_4$, eben den Minkowski-Raum.

Die pseudoeuklidische Struktur des Raumes zeigt sich darin, dass das Abstandsquadrat eines Punktes (Ereignispunktes) vom Ursprung des Koordinatensystems nicht (wie in einem euklidischen Raum)

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$$

ist, sondern

$$d^2 = x^2 + y^2 + z^2 - w^2.$$

Entsprechend ist das Abstandsquadrat zweier beliebiger Punkte

$$\left(\Delta d\right)^2 = \left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta y\right)^2 + \left(\Delta z\right)^2 - \left(\Delta w\right)^2.$$

Genau wie $d^2$ ist auch $(\Delta d)^2$ invariant gegenüber Lorentz-Transformation.

2. Der Ort *E* eines Ereignisses ***E***, das im Ursprung von $R_3$ (also in *O*) zur Zeit *t* stattfindet, hat im Minkowski-Raum die Koordinaten (0, 0, 0, $w = c\ t$). Daraus folgt, dass sich *O* mit Lichtgeschwindigkeit auf der *W*-Achse nach oben bewegt. Dasselbe gilt natürlich für das (*X Y Z)*-Koordinatensystem und somit für $R_3$. Also: Im Minkowski-Raum bewegt sich der Erfahrungsraum (identisch mit dem Raum der klassischen Physik) mit Lichtgeschwindigkeit in Richtung der *W*-Achse.

Dieser vierdimensionale Vorgang ist natürlich weder vorstellbar noch abbildbar. Dies bedeutet nicht, dass er nicht real sein kann, sondern lediglich, dass das Vorstellungsvermögen des Menschen die wirkliche Struktur der Welt nicht erfassen kann. Wir müssen uns daher sowohl in der Vorstellung wie bei der Abbildung mit einem zweidimensionalen Erfahrungsraum begnügen, also auf seine *Z*-Achse verzichten und die dritte Dimension für die *W*-Achse reservieren.

3. Im Minkowski-Raum bedeutet der Übergang zu einem bewegten Bezugssystem *S'* den Übergang zu einem vierdimensionalen Koordinatensystem, das gegenüber dem Koordinatensystem des Bezugssystems *S* um den Ursprung gedreht ist.

Im Folgenden begnüge ich mich mit einer zweidimensionalen Darstellung, in der nur die *X/*X'- und die *W/W'*-Achsen erfasst werden. Die *Y*-Achse kann man sich senkrecht darauf vorstellen. Ein weiteres und schwierigeres Problem dabei ist, dass die pseudoeuklidische *X W*-Ebene sich nicht ohne weiteres in einer euklidischen Zeichenebene wiedergeben lässt, weil die eben eine euklidische Struktur hat. Man kann jedoch zeigen, dass das Bezugssystem *S* und das gedrehte Bezugssystem *S'* – wenn auch in verzerrter Form – so in eine euklidische Ebene abgebildet werden können, dass die Eigenschaften der Lorentz-Transformation erhalten bleiben. Die Bedingungen dafür lauten:

1. Eines der beiden Bezugssysteme kann durch ein rechtwinkliges Koordinatensystem dargestellt werden.

2. Das andere Bezugssystem wird durch ein schiefwinkliges Koordinatensystem dargestellt, dessen Achsen gegenüber den Achsen des anderen Systems um einen Winkel $\alpha$ in entgegengesetztem Sinn gedreht sind. Für den Winkel $\alpha$ gilt:

$$\tan\alpha = \frac{v}{c}.$$

3. Ferner müssen die Einheitsstrecken $e'$ des schiefwinkligen Systems gestreckt werden, und zwar so, dass gilt

$$e' = \frac{e}{\sqrt{\cos 2\alpha}}.$$

Unter diesen Bedingungen sind die Transformationsgleichungen der Analytischen Geometrie für den Übergang von einem rechtwinkligen zu einem schiefwinklig-symmetrischen Koordinatensystem mit den Lorentz-Transformationen identisch.

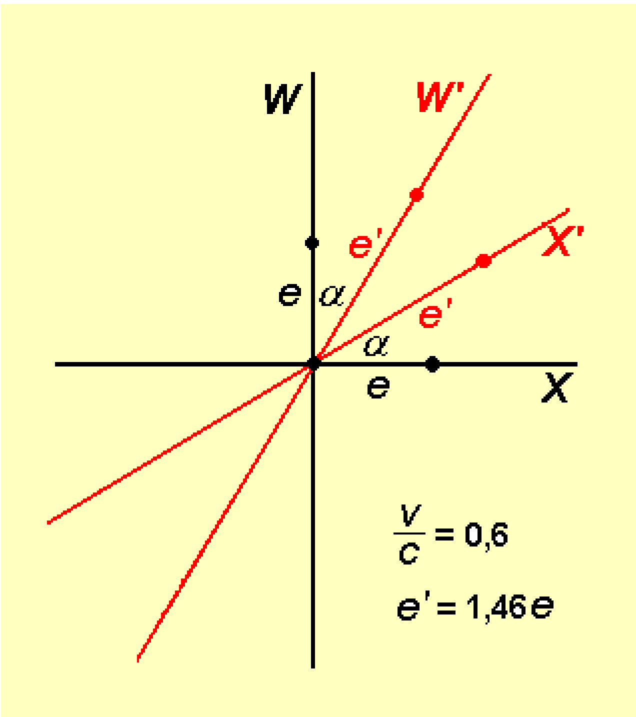


Abbildung 1: Die beiden Koordinatensysteme zur Zeit $t = 0$.

Wie schon erklärt wurde, bewegt sich der Ursprung des dreidimensionalen Erfahrungsraumes $R_3$ bzw. $R'_3$ mit Lichtgeschwindigkeit auf der $W$- bzw. der $W'$-Achse aufwärts.

Für den Ursprung $O'$ zur Zeit $t$ gilt dann (wegen $x' = 0$) nach Gleichung (1)

$$x = \frac{v}{c}w = \frac{v}{c}ct = vt$$

Für einen Beobachter in $S$ sieht das im Minkowski-Raum so aus:

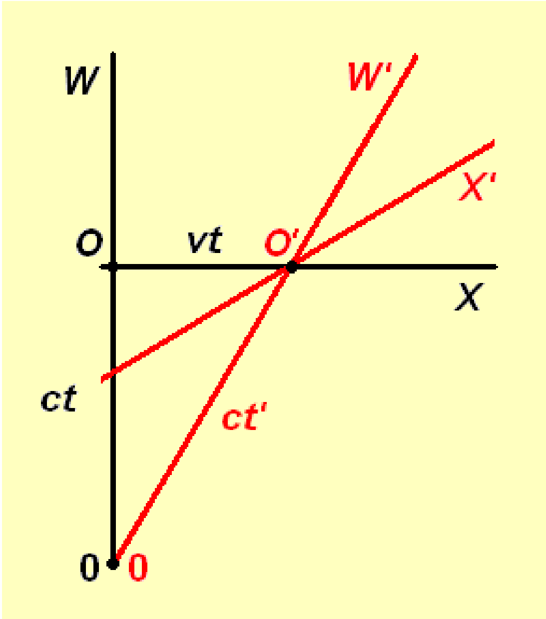


Abbildung 2: Bewegung der Erfahrungsräume, Beobachter in *S* ruhend

Man beachte den Unterschied zwischen *O* für Ursprung und 0 für Nullpunkt.

Der Ursprung *O'* von *S'* hat in *S'* die Koordinaten 0 und *ct'*, in *S* die Koordinaten *vt* und *ct*. Er bewegt sich also – wie es sein soll – auf der *X*-Achse mit der Geschwindigkeit *v* nach rechts. (Die *X*-Achse geht durch *O'*.) Dies ist das einzige Merkmal, woran zu erkennen ist, dass der Beobachter in *S* ruht.

Bemerkenswert ist die Tatsache, dass die übrigen Punkte der eingezeichneten *X'*-Achse nicht auf der *X*-Achse liegen. Das liegt natürlich daran, dass für einen Beobachter die Uhren auf der *X'*-Achse nicht synchron gehen und folglich unterschiedliche *w*-Koordinaten haben. Aber in der Realität befindet sich doch in jedem Punkte der *X*-Achse auch ein Punkt der *X'*-Achse. Wie steht es damit? Ich komme später darauf zurück.

Für einen Beobachter, der in *S'* ruht, sieht die Situation so aus:

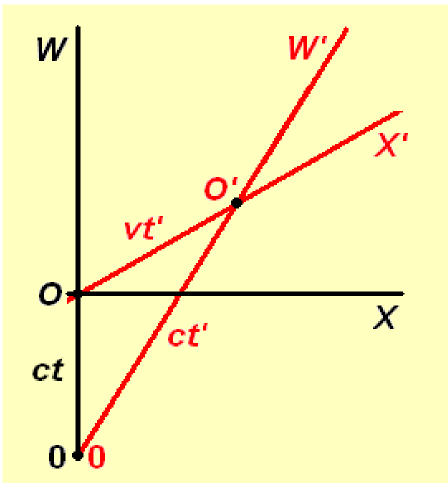


Abbildung 3: Bewegung der Erfahrungsräume, Beobachter in *S'* ruhend

Hier bewegt sich der Ursprung *O* auf der *X'*-Achse mit der Geschwindigkeit *v* nach links, und die *X'*-Achse geht durch *O*. Bei gleicher Lage des Punktes *O'* im Minkowski-Raum (d. h. bei gleichem *t'* wie oben) hat *t* jetzt einen anderen Wert.

## 2. Zeit- und Längenvergleich

Die folgende Abbildung zeigt oben die *X*- und die *X'*-Achse der Bezugssysteme *S* und *S'* sowie eine Anzahl Uhren aus der Sicht eines in *S* ruhenden Beobachters. Es ist wieder $v/c = 0{,}6$ und $t = 0$. Bei den Uhren entspricht eine Zeigerumdrehung 6 Mikrosekunden.

Im unteren Teil der Abbildung ist dieselbe Situation im Minkowski-Raum dargestellt. Da im System S überall $t = 0$ ist, ist die *X*-Achse nur einmal eingezeichnet. Die Lage der *X'*-Achse dagegen musste für fünf verschiedene Zeiten gezeichnet werden.

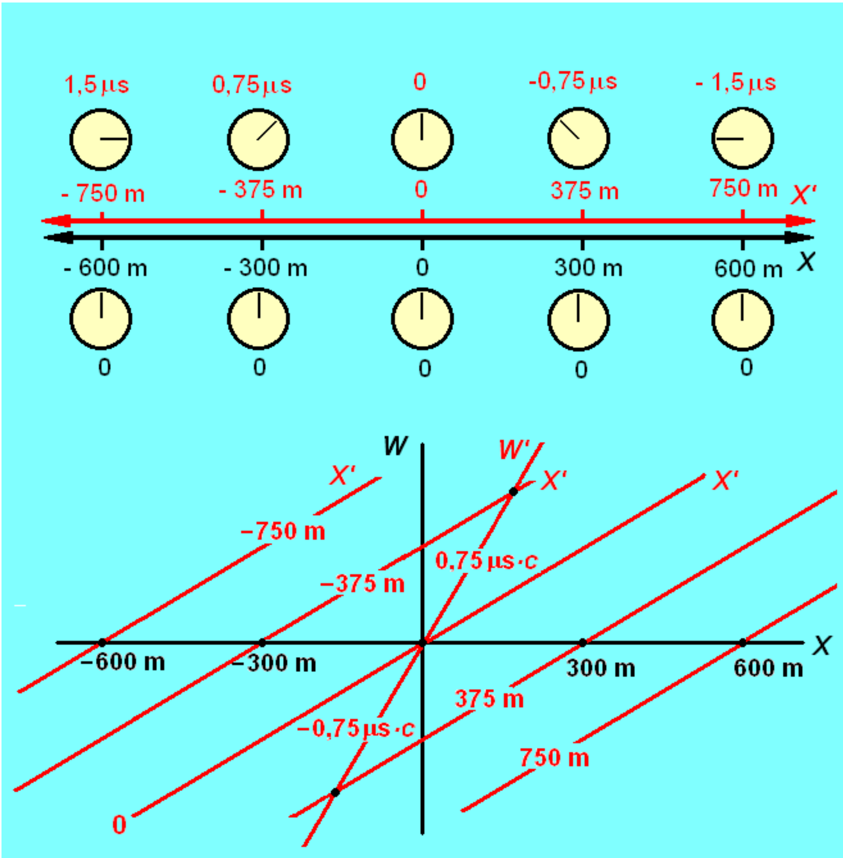


Abbildung 4: Längen und Zeiten im Minkowski-Raum

Wenn man bedenkt, dass in unserem Erfahrungsraum ($R_3$) nur gegenwärtig und erfahrbar ist, was – in der Abbildung – gerade auf der X-Achse liegt, so wird klar, dass durch jeden Punkt der *X*-Achse eine *X'*-Achse gehen muss, damit auf jeden Punkt der *X*-Achse auch ein Punkt der *X'*-Achse zu liegen kommt. Die *X'*-Achsen füllen also die Zeichenebene (die hier eine zweidimensionale Darstellung des Minkowski-Raumes ist) lückenlos aus. Das gleiche gilt natürlich auch für die *X*-Achsen.

## 3. Ereignispunkte im Minkowski-Raum

Ein Ereignis, zum Beispiel ein Blitzeinschlag, das im Bezugssystem *S* zu irgendeiner Zeit $t_1$ auf der *X*-Achse stattfindet, tritt im System *S'* auf der X'-Achse zur Zeit $t_1'$ ein.

Der Ort *E* des Ereignisses ***E*** hat im Minkowski-Raum im Bezugssystem *S* die Koordinaten $(x_1, y_1, z_1, w_1 = ct_1)$, im System *S'* die Koordinaten $(x_1', y_1', z_1', w_1' = ct_1')$.

Der Zusammenhang zwischen diesen zwei Koordinaten-Vierlingen wird durch die Lorentz-Transformationen beschrieben.

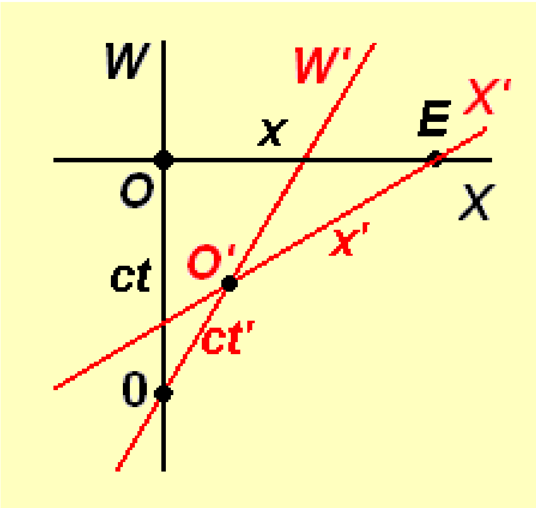


Abbildung 5: Ereignispunkt im Minkowski-Raum

Allerdings hat die Sache einen Haken: Wenn ***E*** in *S'* eintritt, steht es in *S* noch bevor, und wenn es in *S* eintritt, ist es in *S'* schon vorüber. Das zeigen die folgenden Abbildungen, die beide für einen in *S* ruhenden Beobachter gelten.

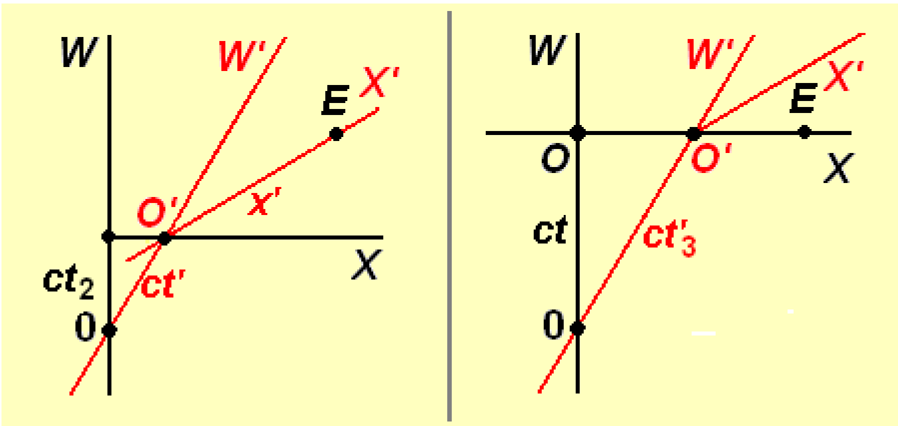


Abbildung 6: Ereignisse vergehen nicht

Daraus folgt, dass das Ereignis im Minkowski-Raum andauert. Einem vorübergehenden »Ereignen« im dreidimensionalen Erfahrungsraum entspricht also ein andauerndes »Sein« in der vierdimensionalen Welt.

Dieser nie richtig dargestellte Sachverhalt war Einstein sehr wohl bekannt, er hat jedoch nur sehr selten darüber gesprochen.

## 4. Ausbreitung eines Lichtstrahls

Auf der *X*- und der *X'*-Achse breite sich von *O* aus ein Lichtstrahl nach rechts und links aus. Der Lichtstrahl bewegt sich auf der *X*-Achse genauso schnell nach rechts und links, wie sich die *X*-Achse nach oben bewegt. Folglich läuft der Lichtstrahl im Minkowski-Raum auf der Winkelhalbierenden der Achsen.

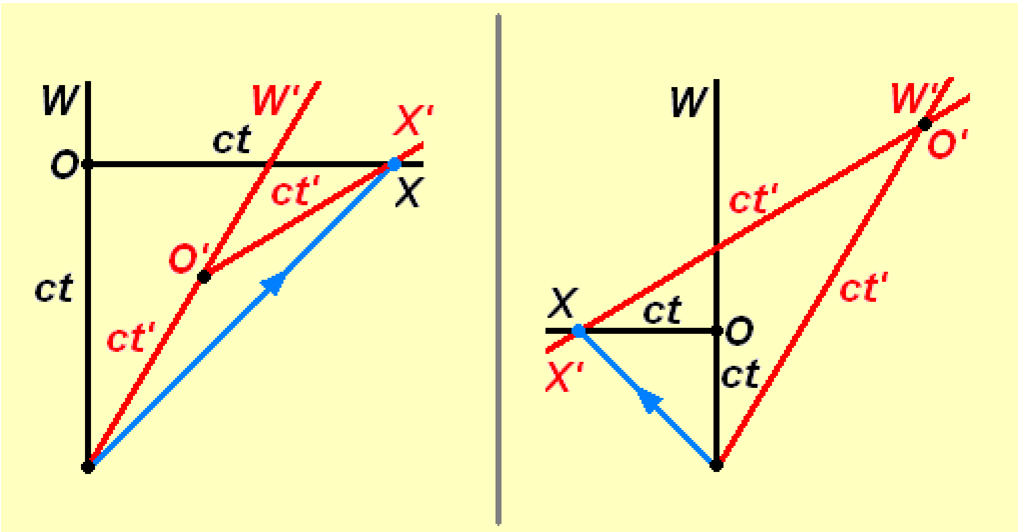


Abbildung 7: Ausbreitung eines Lichtstrahls nach rechts und links

## 5. Zwei Blitzeinschläge

Nun möchte ich das bekannte Gedankenexperiment zur Relativität der Gleichzeitigkeit im Minkowski-Raum darstellen.

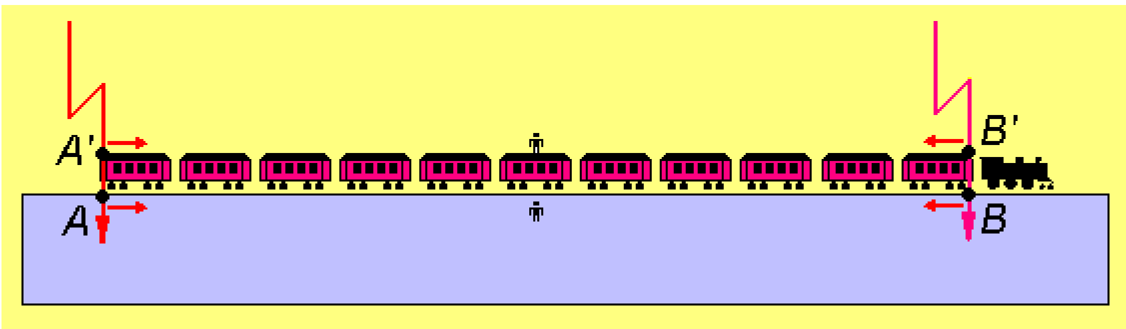


Abbildung 8: Zwei Blitze schlagen ein

Das Bezugssystem *S* sei ein Bahndamm, auf dem ein Zug (Bezugssystem *S'*) fährt. Für den Beobachter am Bahndamm schlagen in den Punkten *A* und *B* gleichzeitig zwei Blitze in den Zug und in den Bahndamm ein. Die entsprechenden Punkte im Zug seien *A'* und *B'*. Die von den Blitzen ausgehenden Lichtimpulse treffen sich genau in der Mitte bei dem dort stehenden

Beobachter. Wegen der Bewegung des Zuges trifft der Lichtimpuls von *B'* früher bei dem Beobachter auf dem Zug ein als der Lichtimpuls von *A'*. Der Beobachter schließt daraus mit Recht, dass in seinem Bezugssystem der Blitz in *B'* früher eingeschlagen hat als der in *A'*.

Im Minkowski-Raum sieht dieser Vorgang so aus:

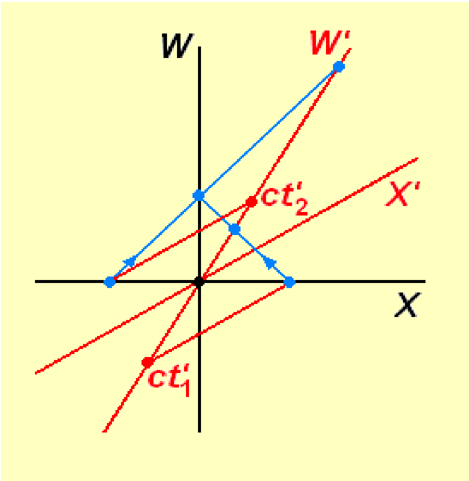


Abbildung 9: Ausbreitung der Lichtimpulse

Die beiden Beobachter bewegen sich auf der *W*-Achse bzw. der *W'*-Achse aufwärts. Auf der *W*-Achse treffen die Lichtimpulse gleichzeitig ein, auf der *W'*-Achse dagegen nicht. Das rührt daher, dass der rechte Blitz in die *X'*-Achse zur Zeit $t_1$' eingeschlagen hat, der linke Blitz aber erst zur Zeit $t_2$'.

## 6. Die Relativität der Länge

Zur Erklärung der Relativität mit Hilfe des Minkowski-Raumes findet man häufig die folgende oder eine sehr ähnliche Darstellung, die auf Minkowski selbst zurückgeht: Auf der *X*-Achse des Systems *S'* ruhe ein Stab der Länge *l'* = *A'B'*. Zur Bestimmung seiner Länge für einen Beobachter in *S* müssen die Lage seines Anfangs- und seines Endpunktes auf der *X*-Achse zur selben Zeit ermittelt werden. In der folgenden Abbildung soll das die Strecke *A'B* sein, die auch tatsächlich die richtige Länge hat.

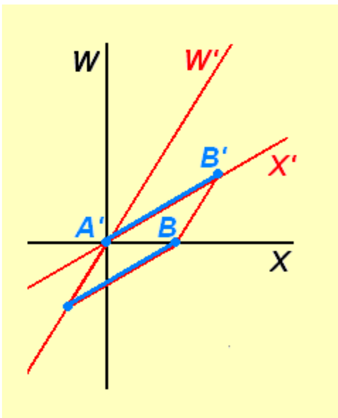


Abbildung 10: Relativität der Länge

Jedoch basiert diese Längenmessung auf zwei verschiedenen Stellungen des betrachteten Stabes, die dieser zu unterschiedlichen Zeiten eingenommen hat. Und bis der Stab sich von der unteren Position in die obere bewegt hat, hat auch die *X*-Achse ihre Lage verändert. Es sei denn, man nimmt an, dass der Stab sich im Minkowski-Raum als ein Streifen darstellt, der von zwei Parallelen von der Richtung der *W'*-Achse begrenzt wird. Das muss tatsächlich der Fall sein, denn sonst könnte immer nur *ein* Punkt der *X'*-Achse auf der *X*-Achse gegenwärtig sein.

## 5. 7 Das so genannte Zwillingsparadoxon

Das so genannte Zwillingsparadoxon, das natürlich *kein* Paradoxon ist, stellt den zwingenden Beweis für die pseudoeuklidische Struktur des Minkowski-Raumes dar. Nur in einem solchen Raum ist es möglich, dass jemand nach einer Reise an den Ausgangspunkt zurückkehrt und dort feststellt, dass die eigene Uhr gegenüber den Uhren der Daheimgebliebenen nachgeht. Und zwar umso mehr, je länger sein Weg war.

So muss man also die Erkenntnisse Minkowskis, die zunächst nur als eine kühne mathematische Spekulation erschienen, als zutreffend anerkennen.

Siegfried Petry, im Mai 2010

Home Rückmeldungsformular/Gästebuch