Einführung in die Tensorrechnung

Teil 2

Siegfried Petry

Fassung vom 2. Mai 2011

Inhalt

1 Tensoren vom Rang 2 (Tensoren 2. Stufe)

Das Nachprodukt eines Vektors $\boldsymbol{u}$ und einer Dyade hat eine Anzahl besonderer Eigenschaften, von denen hier zunächst vier genannt werden sollen. Dabei benutzen wir für die Dyade folgende Abkürzung:

$$\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w} =: \boldsymbol{T}. \qquad \textbf{(2.1)}$$

1. Das Produkt $\boldsymbol{Tu}$ ist das k-fache des Vektors $\boldsymbol{v}$ (siehe Gleichung 1.35 in Teil I, S. 13). Dabei ist k das Skalarprodukt des zweiten Vektors $\boldsymbol{w}$ der Dyade und des »Nachvektors« $\boldsymbol{u}$:

$$[\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}]\boldsymbol{u} \equiv \boldsymbol{Tu} = k\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{u}]\boldsymbol{v}. \qquad \textbf{(2.2)}$$

2. Das Produkt $\boldsymbol{Tu}$ ist nach Gleichung 1.32 in Teil I, S. 13 ein Vektor $\boldsymbol{t}$ mit den Komponenten

$$\begin{aligned} t_1 &= v_1 w_1 u_1 + v_1 w_2 u_2 + v_1 w_3 u_3, \\ t_2 &= v_2 w_1 u_1 + v_2 w_2 u_2 + v_2 w_3 u_3, \\ t_3 &= v_3 w_1 u_1 + v_3 w_2 u_2 + v_3 w_3 u_3. \end{aligned} \qquad \textbf{(2.3)}$$

Ersetzt man den Vektor $\boldsymbol{u}$ durch die Summe $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s}$ zweier Vektoren $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{s}$, so wird

$$\begin{aligned} t_1 &= v_1 w_1 (r_1 + s_1) + v_1 w_2 (r_2 + s_2) + v_1 w_3 (r_3 + s_3) \\ &= \underbrace{v_1 w_1 r_1 + v_1 w_2 r_2 + v_1 w_3 r_3}_{t_1^{(\boldsymbol{r})}} + \underbrace{v_1 w_1 s_1 + v_1 w_2 s_2 + v_1 w_3 s_3}_{t_1^{(\boldsymbol{s})}}. \end{aligned}$$

Analoges gilt für t_2 und t_3. Daraus folgt

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s}) = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{r} + \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{s} \qquad \text{Distributivität zur Addition} \qquad \textbf{(2.4)}$$

3. Analog lässt sich zeigen, dass

$$\boldsymbol{T}[k\,\boldsymbol{v}] = k\,\boldsymbol{T}\,\boldsymbol{v}. \qquad \textbf{(2.5)}$$

4. In Gleichung 2.2 sind $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$ Vektoren, die als solche von der benutzten Basis (Koordinatensystem) unabhängig sind. (Sie sind »invariant gegenüber Basiswechsel«.) Das bedeutet, dass unabhängig von der benutzten Basis aus dem Vektor $\boldsymbol{u}$ durch Multiplikation mit der Dyade $\boldsymbol{T}$ immer derselbe Vektor $k\,\boldsymbol{v}$ entsteht. Also ist das Ergebnis der Operation $\boldsymbol{Tu}$ invariant gegenüber Basiswechsel (oder: unabhängig von der benutzten Basis).

Ein mathematischer Operator mit diesen vier Eigenschaften heißt »Tensor vom Rang 2«. Also sind Dyaden Tensoren vom Rang 2. Da wir es künftig nur mit Tensoren vom Rang 2 zu tun haben werden, lassen wir den Zusatz »vom Rang 2« im Allgemeinen weg.

Andererseits muss ein Tensor nicht notwendig eine Dyade sein. Da in der Matrizendarstellung einer Dyade ausschließlich Produkte von je zwei Vektorkomponenten auftreten, genügt es, wenn bei Basiswechsel die Komponenten des Tensors genau so transformiert werden wie diese Produkte. Unter dieser Bedingung bleiben nämlich alle oben abgeleiteten Eigenschaften erhalten. (Lediglich ist in Gleichung 2.2 der Vektor $\boldsymbol{v}$ im Ergebnis nicht zu identifizieren.) Durch diese Verallgemeinerung des Tensorbegriffs ist es möglich, später weitere wichtige Tensoreigenschaften nachzuweisen.

Übung 2.1

Welche Beziehungen müssen zwischen den Elementen a_{ik} einer 3 x 3 Matrix bestehen, damit diese ein dyadisches Produkt und damit auch einen Tensor darstellen kann? Hinweis: Man setze $a_{ik} = v_i w_k$ und untersuche die Konsequenzen.

Übung 2.2

Können aus den Elementen einer Tensormatrix eindeutig die Vektoren $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ bestimmt werden, deren dyadisches Produkt der Tensor ist? Wenn nein, warum nicht? Wie viel Vektorkomponenten können willkürlich gewählt werden?

Übung 2.3

Welche Beziehung besteht zwischen den auf der Hauptdiagonalen (sie verläuft von links oben nach rechts unten) der Tensormatrix stehenden so genannten »Tensorkomponenten 1. Art« $v_{ii}\, w_{ii}$ ($i = 1, 2, 3$) einerseits und dem Skalarprodukt $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}$ andererseits?

Übung 2.4

Welche Beziehungen bestehen zwischen den übrigen 6 Tensorkomponenten (sie heißen »Tensorkomponenten 2. Art«) und den Komponenten des Vektorprodukts $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$?

Es ist hier nützlich, sich daran zu erinnern, dass auch in der Vektoranalysis ähnliche Produkte aus einem »Operator« und einem Vektor auftreten. Einfache Bespiele dafür sind div $\boldsymbol{v}$ und rot $\boldsymbol{v}$, wobei div und rot als Faktoren aufgefasst werden, die aus bestimmten Differentialoperatoren bestehen, mit denen ein Vektor $\boldsymbol{v}$ nach den Regeln der Algebra multipliziert wird. Auch diese Operatoren und ihre Produkte sind von der benutzten Basis unabhängig.

Beispiele:

1. Der Vektor grad U ist als solcher von der Basis unabhängig. Er gibt für jeden Punkt eines Skalarfeldes Richtung und Größenwert des steilsten Anstiegs der Feldfunktion U an. In einem bestimmten Punkt P hat der Vektor grad U einen bestimmten Betrag und eine bestimmte Richtung; beide werden durch einen Wechsel der Basis nicht beeinflusst, wenn auch die Komponenten des Vektors sich dabei verändern.

2. Der Skalar div $\boldsymbol{v}$ gibt für jeden Punkt eines Vektorfeldes die so genannte Quelldichte des Feldvektors an. Auch diese Größe bleibt beim Wechsel des Koordinatensystems unverändert.

Genau so ist der Tensor $\boldsymbol{T}$ ein Faktor, der mit einem beliebigen Vektor $\boldsymbol{v}$ multipliziert werden kann (und multipliziert werden muss, damit man ein definiertes Ergebnis – einen Vektor – erhält). Was der Tensor $\boldsymbol{T}$ für sich allein genommen bedeutet, wissen wir (zunächst) noch nicht, jedoch kann diese Bedeutung erschlossen werden.

Übung 2.5

Welche der Differentialoperatoren grad, div, rot, Laplace-Operator Δ und Hamiltonscher Differentialoperator (Nablaoperator) sind nach diesen Kriterien ein Tensor oder können ein Tensor sein? Begründen Sie Ihre Entscheidung. Zeigen Sie, dass die Ergebnisse der jeweiligen Operation invariant gegen Basiswechsel (Koordinatentransformation) sind.

Wir definieren noch den **Nulltensor** $\boldsymbol{0}$ durch die Eigenschaft $\boldsymbol{0}\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ (Nullvektor) und den **Identitätstensor** $\boldsymbol{I}$ durch die Eigenschaft $\boldsymbol{I}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$.

Schließlich definieren wir die **Gleichheit zweier Tensoren**: Zwei Tensoren $\boldsymbol{T}$ und $\boldsymbol{U}$ sind genau dann gleich, wenn gilt $\boldsymbol{T}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$ und zugleich $\boldsymbol{U}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$ (kurz: $\boldsymbol{T}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{v}$).

2 Darstellung eines Tensors vom Rang 2 in einer Basis

Es soll nun untersucht werden, wie sich ein Tensor $\boldsymbol{T}$ in einer gegebenen kartesischen Basis mit den Basisvektoren $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ darstellen lässt. (Die Analogie dazu ist die bekannte Darstellung eines Vektors durch seine skalaren Komponenten bezüglich einer Basis.)

Wir gehen davon aus, dass durch Multiplikation eines Vektors mit einem Tensor ein anderer Vektor entsteht. Nehmen wir an, durch Multiplikation des Nachvektors $\boldsymbol{v}$ mit dem Tensor $\boldsymbol{T}$ entstehe der Vektor $\boldsymbol{w}$:

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}.$$

Die Darstellung der beiden Vektoren in der gegebenen Basis sei:

$$\boldsymbol{v} = v_1\,\boldsymbol{e}_1 + v_2\,\boldsymbol{e}_2 + v_3\,\boldsymbol{e}_3, \quad \boldsymbol{w} = w_1\,\boldsymbol{e}_1 + w_2\,\boldsymbol{e}_2 + w_3\,\boldsymbol{e}_3.$$

Dann gilt:

$$\boldsymbol{T}(v_1\,\boldsymbol{e}_1 + v_2\,\boldsymbol{e}_2 + v_3\,\boldsymbol{e}_3) = w_1\,\boldsymbol{e}_1 + w_2\,\boldsymbol{e}_2 + w_3\,\boldsymbol{e}_3.$$

Die Umformung der linken Seite nach Gleichung 2.4 ergibt

$$\boldsymbol{T}(v_1\,\boldsymbol{e}_1 + v_2\,\boldsymbol{e}_2 + v_3\,\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{T}(v_1\,\boldsymbol{e}_1) + \boldsymbol{T}(v_2\,\boldsymbol{e}_2) + \boldsymbol{T}(v_3\,\boldsymbol{e}_3) = w_1\,\boldsymbol{e}_1 + w_2\,\boldsymbol{e}_2 + w_3\,\boldsymbol{e}_3.$$

Mit Gleichung 2.5 wird daraus

$$v_1\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_3 = w_1\,\boldsymbol{e}_1 + w_2\,\boldsymbol{e}_2 + w_3\,\boldsymbol{e}_3. \tag{2.6}$$

Nun sind die $\boldsymbol{T}\,\boldsymbol{e}_i$ auf der linken Seite wiederum Vektoren $\boldsymbol{t}_i$, die sich ebenfalls in der benutzten Basis darstellen lassen. Bezeichnen wir ihre skalaren Komponenten in der Basis mit t_{ik} (i, k = 1, 2, 3), dann ist

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_1 &= \boldsymbol{t}_1 = t_{11}\boldsymbol{e}_1 + t_{21}\boldsymbol{e}_2 + t_{31}\boldsymbol{e}_3,\\
\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_2 &= \boldsymbol{t}_2 = t_{12}\boldsymbol{e}_1 + t_{22}\boldsymbol{e}_2 + t_{32}\boldsymbol{e}_3,\\
\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_3 &= \boldsymbol{t}_3 = t_{13}\boldsymbol{e}_1 + t_{23}\boldsymbol{e}_2 + t_{33}\boldsymbol{e}_3.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Die neun skalaren Komponenten dieser drei Gleichungen lassen sich in einer Matrix $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{T}}$ anordnen, die eine besondere Bedeutung hat (siehe unten):

$$\boldsymbol{M_T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(2.8)}$$

Mit den Gleichungen 2.7 lässt sich Gleichung 2.6 wie folgt schreiben:

$$v_1(t_{11}\boldsymbol{e}_1 + t_{21}\boldsymbol{e}_2 + t_{31}\boldsymbol{e}_3) + v_2(t_{12}\boldsymbol{e}_1 + t_{22}\boldsymbol{e}_2 + t_{32}\boldsymbol{e}_3) + v_3(t_{13}\boldsymbol{e}_1 + t_{23}\boldsymbol{e}_2 + t_{33}\boldsymbol{e}_3) = w_1\boldsymbol{e}_1 + w_2\boldsymbol{e}_2 + w_3\boldsymbol{e}_3.$$

Durch Ausmultiplizieren, Umordnen und Ausklammern von $\boldsymbol{e}_i$ auf der linken Seite erhält man

$$(v_1t_{11} + v_2t_{12} + v_3t_{13})\boldsymbol{e}_1 + (v_1t_{21} + v_2t_{22} + v_3t_{23})\boldsymbol{e}_2 + (v_1t_{31} + v_2t_{32} + v_3t_{33})\boldsymbol{e}_3$$

Der Vergleich der Koeffizienten gleicher Basisvektoren links und rechts ergibt

$$\begin{aligned} v_1t_{11} + v_2t_{12} + v_3t_{13} &= w_1, \\ v_1t_{21} + v_2t_{22} + v_3t_{23} &= w_2, \\ v_1t_{31} + v_2t_{32} + v_3t_{33} &= w_3. \end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen lassen sich mit zwei Matrizen als eine einzige Gleichung schreiben:

$$\begin{pmatrix} v_1t_{11} + v_2t_{12} + v_3t_{13} \\ v_1t_{21} + v_2t_{22} + v_3t_{23} \\ v_1t_{31} + v_2t_{32} + v_3t_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{w}).$$

Die linke Seite kann man als (Nach-)Produkt der Matrix

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{v})$$

mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}$$

schreiben (siehe dazu die Gleichungen 1.14 und 1.15 in Teil I, S. 8)) Es ist also

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

oder kurz

$$(t_{ik})(\boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{w}).$$

Die Matrix ($\boldsymbol{w}$) des Vektors $\boldsymbol{w}$ bezüglich der benutzten Basis ergibt sich also durch Multiplikation der Matrix ($\boldsymbol{v}$) des Vektors $\boldsymbol{v}$ bezüglich derselben Basis mit der Matrix (t_{ik}). Der Vergleich mit der Ausgangsgleichung $\boldsymbol{Tv} = \boldsymbol{w}$ zeigt, dass (t_{ik}) die Matrix des Tensors $\boldsymbol{T}$ im benutzten Basissystem ist:

$$(\boldsymbol{T}) = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}.$$

Die Elemente der Matrix heißen »Komponenten der Tensormatrix« oder kurz »Komponenten des Tensors« bezüglich der benutzten Basis.

Die Matrix (T) des Tensors T ist gleich der transponierten Matrix der in Gleichung 2.8 genannten Matrix:

$$(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{M}_T{}^{\mathrm{T}}.$$

Folglich gilt: **Ein Tensor vom Rang 2 kann bezüglich jeder Basis durch eine 3 x 3 Matrix dargestellt werden.**

Wie bei einem Vektor hängen die Komponenten des Tensors von der benutzten Basis ab, obwohl der Tensor selbst invariant ist gegenüber Basiswechsel. Anders als bei der Komponentendarstellung eines Vektors treten aber die Basisvektoren selbst nicht auf. Sie haben jedoch implizit Einfluss auf die Matrix $\boldsymbol{M}_T$ und damit auch auf die Komponentenmatrix ($\boldsymbol{T}$) des Tensors $\boldsymbol{T}$.

Die Tatsache, dass ein Tensor invariant gegen Basiswechsel ist, bedeutet zunächst Folgendes: Beim Wechsel der Basis müssen seine Komponenten nach einem allgemein gültigen Gesetz so transformiert werden können, dass der Tensor mit den transformierten Komponenten im neuen Koordinatensystem einen Vektor $\boldsymbol{v}$ auf denselben Vektor $\boldsymbol{w}$ abbildet, wie es der Tensor mit den ursprünglichen Komponenten in der ursprünglichen Basis getan hat. Das bedeutet: Wenn die transformierte Matrix des Tensors in der neuen Basis gleich

$$(t'_{ik}) = \begin{pmatrix} t'_{11} & t'_{12} & t'_{13} \\ t'_{21} & t'_{22} & t'_{23} \\ t'_{31} & t'_{32} & t'_{33} \end{pmatrix}$$

ist, dann muss

$$(t'_{ik}) \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \end{pmatrix}$$

sein, wobei

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \\ w'_3 \end{pmatrix}$$

die Matrizen der Vektorkomponenten von $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ in der neuen Basis sind

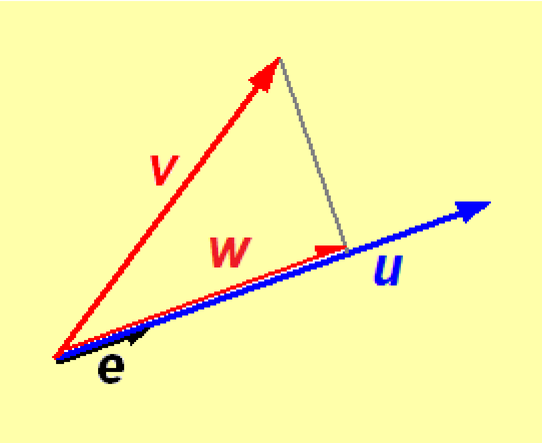
3 Beispiele und Übungen

Beispiel 2.1: Die Projektion eines Vektors auf einen anderen Vektor als Tensoroperation

Ein Vektor $\boldsymbol{v}$ soll senkrecht auf einen anderen Vektor $\boldsymbol{u}$ projiziert werden. Gesucht ist der Operator $\boldsymbol{P}$, der dieses leistet. Damit meinen wir einen Operator, der – auf den Vektor $\boldsymbol{v}$ angewendet – dessen Projektion $\boldsymbol{w}$ auf $\boldsymbol{u}$ ergibt. Es sei also

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{e},$$

wobei $\boldsymbol{e}$ der auf $\boldsymbol{u}$ liegende Einheitsvektor ist. Dann liefert nämlich das Skalarprodukt $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}$ die Länge (den Betrag) des projizierten Vektors und der Faktor $\boldsymbol{e}$ dessen Richtung.



Der zu $\boldsymbol{u}$ gehörige Einheitsvektor ist

$$\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|} = \frac{\boldsymbol{u}}{u}.$$

Damit wird

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{e} = \left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\boldsymbol{u}}{u}\right)\frac{\boldsymbol{u}}{u} = \frac{1}{u^2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}. \qquad \textbf{(2.9)}$$

Da $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{u}$ Vektoren und als solche basisunabhängig sind, ist auch $\boldsymbol{P}$ basisunabhängig. Ferner gilt:

1. Das Produkt $\boldsymbol{P}\boldsymbol{v}$ stellt offensichtlich einen Vektor $k\,\boldsymbol{u}$ dar, wobei

$$k = \frac{1}{u^2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}).$$

2. Es ist $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s}) = \boldsymbol{P}\boldsymbol{r} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{s}$, wie man graphisch leicht zeigen kann, indem man $\boldsymbol{v}$ in zwei beliebige Summanden $\boldsymbol{r}$ und $\boldsymbol{s}$ zerlegt.

3. Es ist die Länge der Projektion des Vektors $\boldsymbol{v}$ proportional zur Länge von $\boldsymbol{v}$, also

$$\boldsymbol{P}(k\boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{w}.$$

Daraus folgt: Der Operator $\boldsymbol{P}$ ist ein Tensor.

Um die Matrix des Tensors $\boldsymbol{P}$ bezüglich der Basis $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ zu ermitteln, drücken wir das Skalarprodukt $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}$ und den Vektor $\boldsymbol{u}$ durch ihre Komponenten aus:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}\boldsymbol{v} &= \frac{1}{u^2}(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)(u_1\boldsymbol{e}_1+u_2\boldsymbol{e}_2+u_3\boldsymbol{e}_3) \\ &= \frac{1}{u^2}[(u_1u_1v_1+u_1u_2v_2+u_1u_3v_3)\boldsymbol{e}_1+(u_2u_1v_1+u_2u_2v_2+u_2u_3v_3)\boldsymbol{e}_2 \\ &\quad +(u_3u_1v_1+u_3u_2v_2+u_3u_3v_3)\boldsymbol{e}_3]. \end{aligned}$$

Die rechte Seite stellt einen Vektor $\boldsymbol{w}$ dar mit der Komponentenmatrix (Umformung gemäß Gleichung 1.16)

$$(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{u^2}\begin{pmatrix} u_1u_1v_1+u_1u_2v_2+u_1u_3v_3 \\ u_2u_1v_1+u_2u_2v_2+u_2u_3v_3 \\ u_3u_1v_1+u_3u_2v_2+u_3u_3v_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{u^2}\begin{pmatrix} u_1u_1 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ u_2u_1 & u_2u_2 & u_2u_3 \\ u_3u_1 & u_3u_2 & u_3u_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

wofür man schreiben kann

$$(\boldsymbol{w}) = \frac{1}{u^2}\begin{pmatrix} u_1u_1 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ u_2u_1 & u_2u_2 & u_2u_3 \\ u_3u_1 & u_3u_2 & u_3u_3 \end{pmatrix}(\boldsymbol{v}). \qquad \textbf{(2.10)}$$

Aus $\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$ oder $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{v}$ folgt für die Matrizendarstellung in der benutzten Basis

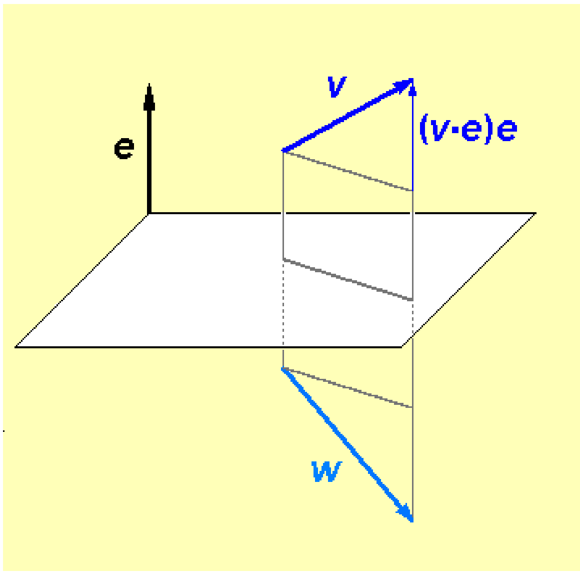
$$(\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{P})(\boldsymbol{v}).$$

Ein Vergleich mit Gleichung 2.10 ergibt dann, dass

$$(\boldsymbol{P}) = \frac{1}{u^2}\begin{pmatrix} u_1u_1 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ u_2u_1 & u_2u_2 & u_2u_3 \\ u_3u_1 & u_3u_2 & u_3u_3 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 2.2: Spiegelung eines Vektors an einer Ebene als Tensoroperation

Analog zum Beispiel 2.1 ist hier ein Operator $\boldsymbol{S}$ gesucht, der einen Vektor $\boldsymbol{v}$ an einer Ebene spiegelt und so den Vektor $\boldsymbol{w}$ erzeugt. Es sei also $\boldsymbol{S}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$. Die Ebene sei beschrieben durch ihren Einheitsnormalenvektor $\boldsymbol{e}$.



Dann ist

$$\boldsymbol{S v} = \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} - 2(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e})\boldsymbol{e}.$$

Begründung: Vom Vektor $\boldsymbol{v}$ muss zweimal seine Projektion $(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e})\ \boldsymbol{e}$ auf den Einheitsvektor $\boldsymbol{e}$ subtrahiert werden, damit man $\boldsymbol{w}$ erhält.

Das Weitere ergibt sich aus folgenden Übungen

Übung 2.6: Beweisen Sie, dass der Operator $\boldsymbol{S}$ aus Beispiel 2.2 ein Tensor ist.

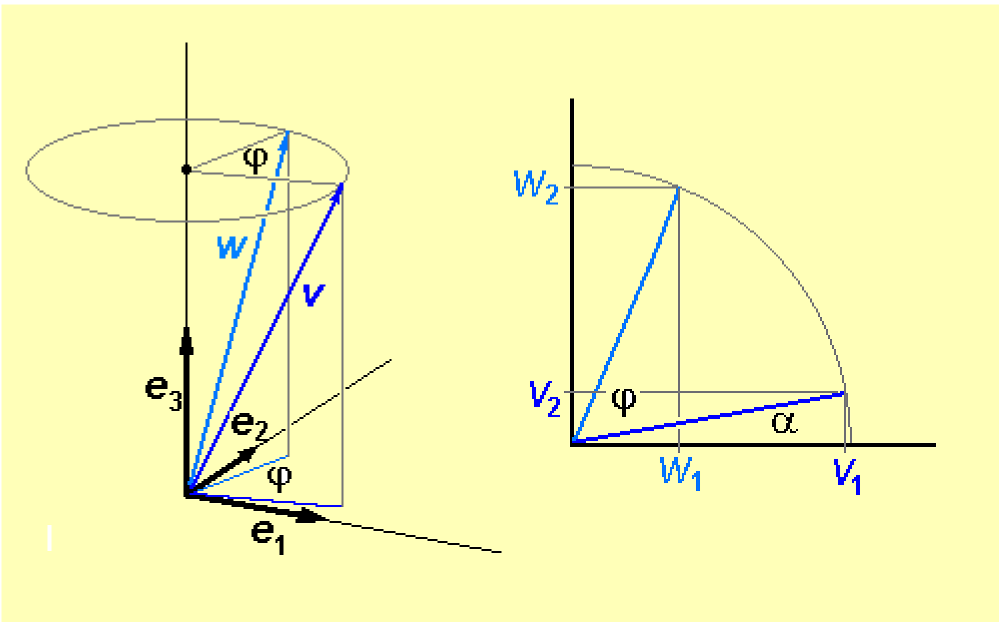
Übung 2.7: Berechnen Sie unter Verwendung des Ergebnisses aus Beispiel 2.1 die Komponentendarstellung des Tensors $\boldsymbol{S}$ aus Übung 2.2. Wie lautet das Ergebnis, wenn der Vektor $\boldsymbol{e}$ mit dem Basisvektor $\boldsymbol{e}_1$ zusammenfällt?

Beispiel 2.3: Die Drehung eines Vektors als Tensoroperation

Ein Vektor $\boldsymbol{v}$ soll bezüglich einer definierten Achse um den Winkel φ gedreht werden. So entstehe der Vektor $\boldsymbol{w}$. Es soll nun untersucht werden, ob sich der Vektor $\boldsymbol{w}$ als Ergebnis einer Tensoroperation

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{D v}$$

darstellen lässt. Wir betrachten den vereinfachten Fall, in dem die Drehachse mit einem der Basisvektoren (hier: $\boldsymbol{e}_3$) zusammenfällt. (Dies lässt sich immer durch eine Koordinatentransformation erreichen.) Bei diesem Beispiel ist es zweckmäßig, gleich mit der Komponentendarstellung der Vektoren zu arbeiten.



Der rechte Teil der Abbildung zeigt die skalaren Komponenten der Vektoren $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ in der Grundrissebene. Es ist

$$w_1 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}\cos(\alpha + \varphi) = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}(\cos\alpha\ \cos\varphi - \sin\alpha\ \sin\varphi),$$
$$w_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}\sin(\alpha + \varphi) = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}(\sin\alpha\ \cos\varphi + \cos\alpha\ \sin\varphi),$$
$$w_3 = v_3,$$

und mit

$$\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\cos\alpha = v_1, \quad \sqrt{v_1^2 + v_2^2}\sin\alpha = v_2,$$

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 \cos\varphi - v_2 \sin\varphi, \\ w_2 &= v_1 \sin\gamma + v_2 \cos\varphi, \\ w_3 &= v_3. \end{aligned}$$

Daher gilt für die Komponentenmatrix des Vektors ***w***:

$$(\boldsymbol{w}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cdot v_1 - \sin\varphi \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 \\ \sin\varphi \cdot v_1 + \cos\varphi \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 \\ 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (\boldsymbol{v}).$$

Aus ***w*** = ***Dv*** folgt für die Matrizendarstellung

$$(\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{D})(\boldsymbol{v})$$

und durch Vergleich

$$(\boldsymbol{D}) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Auch ***D*** erfüllt alle Kriterien eines Tensors. Wie man erkennt, ist hier sogar die Matrix des Tensors basisunabhängig.

Beispiel 2.4: Das Vektorprodukt als Tensoroperation

Das Vektorprodukt ***u*** x ***v*** ist ein Vektor ***w*** vom Größenwert $u\ v \sin\varphi$, der auf ***u*** und ***v*** senkrecht steht und so orientiert ist, dass ***u, v, w*** in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden. Dabei ist φ der Winkel zwischen den beiden Vektoren.

Wir wollen untersuchen, ob die Bildung des Vektorprodukts als Tensoroperation am Vektor ***v*** aufgefasst werden kann, wenn man ***u*** als konstant (oder als Parameter) betrachtet. Nennen wir den Operator, der dieses leisten soll, $\boldsymbol{S_u} \equiv (\boldsymbol{u} \times \quad)$, so ist

$$\boldsymbol{S_u v} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}. \qquad \textbf{(2.11)}$$

Für das Vektorprodukt ***u*** x ***v*** gilt die Komponentendarstellung

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2)\boldsymbol{e}_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3)\boldsymbol{e}_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\boldsymbol{e}_3$$

und daher für seine Matrix

$$(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix soll nun als Matrizenprodukt dargestellt werden. Dazu nehmen wir zunächst eine identische Umformung vor:

$$(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\begin{pmatrix}0\cdot v_1-u_3v_2+u_2v_3\\ u_3v_1+0\cdot v_2-u_1v_3\\ -u_2v_1+u_1v_2+0\cdot v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-u_3&u_2\\ u_3&0&-u_1\\ -u_2&u_1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-u_3&u_2\\ u_3&0&-u_1\\ -u_2&u_1&0\end{pmatrix}(\boldsymbol{v}).$$

Analog wie oben folgt daraus schließlich

$$\left(\boldsymbol{S}_u\right)=\begin{pmatrix}0&-u_3&u_2\\ u_3&0&-u_1\\ -u_2&u_1&0\end{pmatrix}.$$

Übung 2.8: Zeigen Sie, dass der Operator $\boldsymbol{S_u}$ ein Tensor ist.

Beispiel 2.5: Das dyadische Produkt als Tensor

Nach Gleichung 1.26 (Teil I, S. 11) ist das dyadische Produkt zweier Vektoren $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ bezüglich des benutzten Basissystems durch eine 3 x 3 Matrix darstellbar:

$$\left(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}\right)=\begin{pmatrix}v_1w_1&v_1w_2&v_1w_3\\ v_2w_1&v_2w_2&v_3w_3\\ v_3w_1&v_3w_2&v_3w_3\end{pmatrix}. \qquad \textbf{(2.12)}$$

Wie sich leicht zeigen lässt (was als Übung empfohlen wird) erfüllt diese Matrix die Kriterien nach den Gleichungen 2.2 bis 2.4 für einen Tensor. Da die Vektoren $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ vom benutzten Basissystem unabhängig sind, gilt dies auch für ihr dyadisches Produkt. Folglich stellen die Dyade und ihre Matrix einen Tensor dar. Daraus lassen sich zwei neue Tensor-Kriterien herleiten, von denen jedes für sich hinreichend (aber nicht notwendig) ist.

1. Eine Matrix, deren Elemente wie oben angegeben Produkte von je zwei Vektorkomponenten sind, kann als Matrix eines dyadischen Produkts aufgefasst werden und hat daher Tensoreigenschaft.

2. Es genügt jedoch bereits, wenn sich die Elemente der Matrix bei Wechsel des Koordinatensystems genau so transformieren wie die Produkte von je zwei Vektorkomponenten von der oben dargestellten Art. Dann transformiert sich nämlich auch die Matrix insgesamt wie die Matrix einer Dyade und besitzt daher Tensoreigenschaft.

Beispiel 2.6: Der Vektorgradient

Mit dem Gradienten-Operator kann die Änderung dU einer *skalaren* Ortsfunktion U berechnet werden, die beim Voranschreiten um eine gerichtete Strecke d$\boldsymbol{s}$ (»Verschiebung«) im Skalarfeld eintritt. (Siehe dazu Vektoranalysis, Teil II)

Es soll nun untersucht werden, wie sich eine *vektorielle* Ortsfunktion $\boldsymbol{v}$ beim Voranschreiten im Vektorfeld ändert. Dazu berechnen wir die Änderungen der skalaren Komponenten v_x, v_y, v_z des Vektors $\boldsymbol{v}$ mit Hilfe des Gradienten-Operators:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}v_x &= (\operatorname{grad} v_x)\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \frac{\partial v_x}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v_x}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial v_x}{\partial z}\mathrm{d}z \\
\mathrm{d}v_y &= (\operatorname{grad} v_y)\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \frac{\partial v_y}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v_y}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial v_y}{\partial z}\mathrm{d}z \\
\mathrm{d}v_z &= (\operatorname{grad} v_z)\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \frac{\partial v_z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v_z}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial v_z}{\partial z}\mathrm{d}z
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

Damit ergibt sich das Differential d$\boldsymbol{v}$

$$
\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \mathrm{d}v_x\,\boldsymbol{e}_1 + \mathrm{d}v_y\,\boldsymbol{e}_2 + \mathrm{d}v_z\,\boldsymbol{e}_3 = (\mathrm{d}\boldsymbol{s}\cdot\operatorname{grad} v_x)\boldsymbol{e}_1 + (\mathrm{d}\boldsymbol{s}\cdot\operatorname{grad} v_y)\boldsymbol{e}_2 + (\mathrm{d}\boldsymbol{s}\cdot\operatorname{grad} v_z)\boldsymbol{e}_3. \tag{2.14}
$$

Wir bilden nun das dyadische Produkt aus dem Nablaoperator (einem symbolischen Vektor)

$$
\nabla = \boldsymbol{e}_1\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_2\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_3\frac{\partial}{\partial z}
$$

und dem Vektor $\boldsymbol{v}$ (siehe Gleichung 1.26 in Teil I, S.11)

$$
\nabla\otimes\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}
\frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\
\frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\
\frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z}
\end{pmatrix}.
$$

Dieser Tensor heißt Vektorgradient von $\boldsymbol{v}$ (geschrieben: grad $\boldsymbol{v}$):

$$
\operatorname{grad}\boldsymbol{v} := \nabla\otimes\boldsymbol{v}.
$$

Multipliziert man diesen Tensor mit dem Verschiebungsvektor d$\boldsymbol{s}$ als Vorfaktor, so erhält man gemäß den Gleichungen 1.28 und 1.19 den Vektor

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{s}\ \operatorname{grad}\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{s}\ [\nabla\otimes\boldsymbol{v}] &= \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v_x}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial v_x}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v_y}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial v_y}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\boldsymbol{e}_2 \\
&+ \left(\frac{\partial v_z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v_z}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial v_z}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\boldsymbol{e}_3.
\end{aligned}
$$

Dies ist genau die gesuchte Änderung d$\boldsymbol{v}$. Also gilt:

$$
\mathrm{d}\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{s}\ \operatorname{grad}\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{s}\ [\nabla\otimes\boldsymbol{v}].
$$

Dazu zwei Beispiele:

1. Beispiel: Das Vektorfeld sei definiert durch $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{r}$. (Man denke sich also an jeden Punkt $P(x, y, z)$ des Feldes seinen Ortsvektor angeheftet.) Der Vektorgradient dieses Feldes ist dann

$$\operatorname{grad}\boldsymbol{r} = \nabla \otimes \boldsymbol{r} = \left(\boldsymbol{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}_3 \frac{\partial}{\partial z}\right) \otimes (x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\mathrm{d}\boldsymbol{s} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{d}x\,\boldsymbol{e}_1 + \mathrm{d}y\,\boldsymbol{e}_2 + \mathrm{d}z\,\boldsymbol{e}_3 = \mathrm{d}\boldsymbol{s}.$$

Interpretation: Wenn man vom Punkt P um die Strecke d$\boldsymbol{s}$ im Feld voranschreitet, ändert sich der Ortsvektor um d$\boldsymbol{s}$.

2. Beispiel: Der Vektor der elektrischen Feldstärke im Punkt $P(x, y, z)$ des Feldes einer Punktladung Q, die sich im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems befindet, ist

$$\boldsymbol{E} = k\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{k}{r^3}(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3) \quad \text{mit} \quad k = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}.$$

Die Komponenten von $\boldsymbol{E}$ sind also

$$E_x = k\frac{x}{r^3}, \quad E_y = k\frac{y}{r^3}, \quad E_z = k\frac{z}{r^3},$$

woraus folgt

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = k\frac{r^3 - x\frac{\partial r^3}{\partial x}}{r^6} = k\frac{r^3 - x3rx}{r^6} = k\frac{r^2 - 3x^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{-3k\frac{\partial r^3}{\partial y}}{r^6} = -3k\frac{xy}{r^5}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} = -3k\frac{xz}{r^5},$$

Analog findet man:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -3k\frac{xy}{r^5}, \qquad \frac{\partial E_y}{\partial y} = k\frac{r^2 - 3y^2}{r^5}, \qquad \frac{\partial E_y}{\partial z} = -3k\frac{yz}{r^5},$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = -3k\frac{xz}{r^5}, \qquad \frac{\partial E_z}{\partial y} = -3k\frac{yz}{r^5}, \qquad \frac{\partial E_z}{\partial z} = k\frac{r^2 - 3z^2}{r^5},$$

und damit

$$\mathrm{d}E_x = \frac{\partial E_x}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial E_x}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial E_x}{\partial z}\,\mathrm{d}z = k\,\frac{r^2 - 3x^2}{r^5}\,\mathrm{d}x - 3k\,\frac{xy}{r^5}\,\mathrm{d}y - 3k\,\frac{xz}{r^5}\,\mathrm{d}z$$

usw.

Daraus ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{E} = {} & k\left(\frac{r \ - 3x^2}{r^5}\,\mathrm{d}x - 3\frac{xy}{r^5}\,\mathrm{d}y - 3\frac{xz}{r^5}\,\mathrm{d}z\right)\boldsymbol{e}_1 \\
& + k\left(-3\frac{xy}{r^5}\,\mathrm{d}x + \frac{r^2 - 3y^2}{r^5}\,\mathrm{d}y - 3\frac{yz}{r^5}\,\mathrm{d}z\right)\boldsymbol{e}_2 \\
& + k\left(-3\frac{xz}{r^5}\,\mathrm{d}x - 3\frac{yz}{r^5}\,\mathrm{d}y + \frac{r^2 - 3z^2}{r^5}\,\mathrm{d}z\right)\boldsymbol{e}_3.
\end{aligned}$$

4 Lösungen

Übungen 2.1 und 2.2

Setzt man

$$u_1 v_1 = a_{11}, \quad u_1 v_2 = a_{12}, \quad u_1 v_3 = a_{13}, \ \text{usw.},$$

dann ist

$$\begin{aligned}
\frac{a_{11}}{a_{12}} &= \frac{a_{21}}{a_{22}} = \frac{a_{31}}{a_{32}} = \frac{v_1}{v_2} =: k_{12}, \\
\frac{a_{12}}{a_{13}} &= \frac{a_{22}}{a_{23}} = \frac{a_{32}}{a_{33}} = \frac{v_2}{v_3} =: k_{23}, \\
\frac{a_{13}}{a_{11}} &= \frac{a_{23}}{a_{21}} = \frac{a_{33}}{a_{31}} = \frac{v_3}{v_1} =: k_{31},
\end{aligned}$$

und

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}} = \frac{u_1}{u_2} =: l_{12} \quad \text{usw.}$$

Aus diesen homogenen Gleichungen können nur die Quotienten

$$\frac{u_1}{u_k} \quad \text{und} \quad \frac{v_i}{v_k}$$

der Vektorkomponenten bestimmt werden, nicht aber diese selbst. Daraus folgt: Genau eine Komponente der beiden Vektoren kann frei gewählt werden, die übrigen ergeben sich dann daraus. Das bedeutet, dass durch die Matrix die Richtungen der beiden Vektoren bestimmt sind, nicht aber deren Beträge. Ferner: Der Betrag von $\boldsymbol{v}$ ist bei gegebener Matrix dem Betrag von $\boldsymbol{u}$ umgekehrt proportional.

Übung 2.3

Die Summe der Komponenten in der Hauptdiagonalen ist gleich dem Skalarprodukt der Vektoren $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$:

$$v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}.$$

Übung 2.4

Wegen

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3\\ v_1 & v_2 & v_3\\ w_1 & w_2 & w_3\end{vmatrix}=\left(v_2 w_3-v_3 w_2\right)\boldsymbol{e}_1+\left(v_3 w_1-v_1 w_3\right)\boldsymbol{e}_2+\left(v_1 w_2-v_2 w_1\right)\boldsymbol{e}_3$$

ist

$$(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{w})_1=v_2 w_3-v_3 w_2=a_{23}-a_{32}\quad\text{usw.}$$

Übung 2.5

1. Gradient: Der Operator »grad« kann definitionsgemäß nur auf *skalare* Größen angewendet werden, ist also kein Tensor.

2. Divergenz: Der Operator »div« wird zwar auf Vektoren angewendet, erzeugt aber einen Skalar. Er ist also kein Tensor.

3. Rotation: Der Operator »rot« wird auf Vektoren angewender und erzeugt wieder einen Vektor. (Bedingung 1). Ferner gilt rot (***u*** + ***v***) = rot ***u*** + rot ***v*** (Bedingung 2) und rot $a\boldsymbol{v}$ = a rot ***v*** (Bedingung 3). Der Vektor ***w*** = rot ***v*** ist als solcher invariant gegen Koordinatentransformation (Bedingung 4). Also ist »rot« ein Tensor. Allerdings ist Folgendes zu beachten: Der Operator »rot« ist ein Differentialoperator. Seine Anwendung auf einen konstanten Vektor ergibt immer den Nullvektor, also ein triviales Ergebnis. Liegt dagegen ein Vektorfeld vor, in dem $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(x, y, z)$, dann kann rot $\boldsymbol{v}\neq 0$ sein.

4. Laplace-Operator: Der Laplace-Operator

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Kann auf skalare und vektorielle Funktionen angewendet werden. Bei Anwendung auf einen konstanten Vektor werden schon die 1. Ableitungen null. Bei Anwendung auf einen Feldvektor $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(x, y, z)$ gelten:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\boldsymbol{v}}{\partial x^2}\quad\text{usw.}\;\Rightarrow\quad\Delta(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\Delta\boldsymbol{u}+\Delta\boldsymbol{v},$$

und

$$\frac{\partial^2 a\boldsymbol{v}}{\partial x^2}=a\frac{\partial^2\boldsymbol{v}}{\partial x^2}\quad\text{usw.}\quad\Rightarrow\quad\Delta\left(a\boldsymbol{v}\right)=a\,\Delta\boldsymbol{v}.$$

Folglich kann Δ ein Tensor sein.

5. Nablaoperator: Bei Anwendung des Nablaoperators

$$\nabla=\boldsymbol{e}_1\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{e}_2\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{e}_3\frac{\partial}{\partial z}$$

auf einen Feldvektor entsteht ein Skalar, da die beim Multiplizieren entstehenden Produkte alle einen Faktor $\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_k$ enthalten, der entweder 0 oder 1 ist. Der Nablaoperator ist also kein Tensor.

Übung 2.6

Der Beweis erfolgt völlig analog wie der in Übung 2.1

Übung 2.7

Es ist (siehe Beispiel 2.1) $\boldsymbol{Pv} = (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}$ und (siehe Beispiel 2.2) $\boldsymbol{Sv} = \boldsymbol{v} - 2(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e})\boldsymbol{e}$, also ist

$$\boldsymbol{Sv} = \boldsymbol{v} - 2\,\boldsymbol{Pv} = \boldsymbol{E}v - 2\,\boldsymbol{Pv} = (\boldsymbol{E} - 2\,\boldsymbol{P})\boldsymbol{v},$$

wobei $\boldsymbol{E}$ die 3 x 3 Einheitsmatrix ist. Damit ergibt sich die Matrix von $\boldsymbol{S}$:

$$(\boldsymbol{S}) = \boldsymbol{E} - 2(\boldsymbol{P}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2\frac{1}{u^2}\begin{pmatrix} u_1u_1 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ u_2u_1 & u_2u_2 & u_2u_3 \\ u_3u_1 & u_3u_2 & u_3u_3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{2}{u^2}\left[\begin{pmatrix} \frac{u^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{u^2}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_1u_1 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ u_2u_1 & u_2u_2 & u_2u_3 \\ u_3u_1 & u_3u_2 & u_3u_3 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \frac{2}{u^2}\begin{pmatrix} \frac{u^2}{2} - u_1u_1 & -u_1u_2 & -u_1u_3 \\ -u_2u_1 & \frac{u^2}{2} - u_2u_2 & -u_2u_3 \\ -u_3u_1 & -u_3u_2 & \frac{u^2}{2} - u_3u_3 \end{pmatrix}.$$

Wenn $\boldsymbol{e}$ mit dem Basisvektor $\boldsymbol{e}_1$ zusammenfällt, wird $u_2 = u_3 = 0$ und $u_1u_1 = u^2$. Damit wird

$$(\boldsymbol{S}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Übung 2.8

Für jedes Vektorprodukt $\boldsymbol{u}$ x $\boldsymbol{v}$ gilt:

1. Es ist ein Vektor,
2. es ist distributiv zur Addition: $\boldsymbol{u}$ x$(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{s}) = \boldsymbol{u}$ x $\boldsymbol{r}$ + $\boldsymbol{u}$ x $\boldsymbol{s}$
3. $\boldsymbol{u}$ x $(k\boldsymbol{v}) = k\,\boldsymbol{u}$ x $\boldsymbol{v}$
4. es ist invariant gegenüber Basiswechsel.

Also ist $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{u}}$ ein Tensor.

Weiter zu Tensorrechnung III

Home Rückmeldungsformular/Gästebuch