

# **EINFÜHRUNG IN DIE TENSORRECHNUNG**

## **Teil 1**

**SIEGFRIED PETRY**

Fassung vom 2. Mai 2011

# Inhalt

<b>1 Einleitung</b>	3
<b>2 Grundbegriffe</b>	4
2.1 Matrizen und Matrizendarstellung von Vektoren	4
2.2 Grundlegende Definitionen	5
2.3 Weitere Rechengesetze	6
2.3.1 Matrizenprodukte und Vektor-Matrix-Produkte	6
2.3.2 Spezialfall 1: Produkte zweier einreihiger Matrizen	7
2.3.3 Spezialfall 2: Produkte einer einreihigen Matrix mit einer 3 x 3-Matrix	7
2.3.3.1 Das Vorprodukt	7
2.3.3.2 Das Nachprodukt	8
2.3.3.3 Übungen	9
2.4 Produkte von Vektoren	10
2.4.1 Das Skalarprodukt	10
2.4.2 Das dyadische Produkt	11
2.5 Rechengesetze für Dyaden	11
2.5.1 Multiplikation einer Dyade mit einem Skalar	11
2.5.2 Multiplikation einer Dyade mit einem Vektor	12
2.5.2.1 Das Vorprodukt	12
2.5.2.2 Das Nachprodukt	13
<b>3 Lösungen</b>	14

# Einführung in die Tensorrechnung - Teil 1

## 1 Einleitung

Gegenstand dieser Abhandlung sind zunächst die Tensoren 2. Stufe (auch Tensoren vom Rang 2 genannt)<sup>1</sup>. Tensoren 2. Stufe sind mathematische Operatoren, die bei Anwendung auf einen Vektor einen anderen Vektor erzeugen, der bestimmte Eigenschaften hat. (Beispiele folgen später.)

Nach Festlegung (Definition, Verabredung) eines Koordinatensystems – künftig kurz Basis oder Basissystem genannt – lässt sich jeder Tensor durch eine »Matrix« beschreiben, d. h. durch eine bestimmte Anzahl von Zahlen in einer bestimmten Anordnung. Für einen Skalar (Tensor 0. Stufe) besteht diese Matrix nur aus dem Skalar selbst. Bei einem Vektor  $\mathbf{v}$  im dreidimensionalen Raum (Tensor 1. Stufe) besteht die Matrix aus den drei Komponenten  $v_1, v_2, v_3$ , die der Vektor bezüglich der benutzten Basis hat:

$$(v_1 \ v_2 \ v_3).$$

Dies ist eine *einzeilige* Matrix oder kurz: eine Zeilenmatrix. Möglich ist aber auch die Beschreibung des Vektors durch eine *einspaltige* Matrix (kurz: Spaltenmatrix):

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Man beachte, dass diese Matrizen lediglich vereinfachte Beschreibungen des entsprechenden Vektors sind, dass sie aber nicht mit dem Vektor identisch sind. Dies ist wichtig, weil ein und demselben Vektor in verschiedenen Basen ganz verschiedene Matrizen zugeordnet sind. Um Missverständnisse und krasse Fehler zu vermeiden, sollte man die Matrix nicht mit dem Vektor gleichsetzen, sondern immer nur von der Matrix des Vektors (bezüglich einer bestimmten Basis) sprechen. Näheres siehe unter Abschnitt 2.1.

Ein Tensor 2. Stufe lässt sich bezüglich einer Basis durch eine Matrix mit drei Zeilen und drei Spalten darstellen, durch eine so genannte 3 x 3 Matrix:

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}.$$

Auch hier gilt: Eine solche Matrix ist nur eine von beliebig vielen Darstellungsformen des Tensors.

Da Tensoren 2. Stufe bei Berechnungen immer zusammen mit einem Vektor auftreten und die Berechnungen immer mit Matrizen ausgeführt werden, sollen zunächst die dafür benötigten Begriffe und Gesetze der Matrizenrechnung erklärt werden.

---

<sup>1</sup> Skalare sind Tensoren 0. Stufe, Vektoren sind Tensoren 1. Stufe.

## 2 Grundbegriffe

### 2.1 Matrizen und Matrizendarstellung von Vektoren

Eine Matrix vom Typ  $(m, n)$  ist ein rechteckiges Schema von  $m$  mal  $n$  Größen, die in  $m$  Zeilen (waagerechte Reihen) und  $n$  Spalten (senkrechte Reihen) angeordnet sind. Diese Größen heißen Elemente der Matrix. Das Element  $a_{ik}$  (auch  $A_{ik}$ ) der Matrix  $A$  steht in der  $i$ -ten Zeile und in der  $k$ -ten Spalte. Die Elemente der Matrix können reelle oder komplexe Zahlen sein, aber auch andere mathematische Objekte, wie Vektoren, Polynome, Differentiale und andere.

Eine Matrix  $A$  vom Typ  $(m, n)$  kann so dargestellt werden:

$$A_{(m, n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ik})_{(m, n)} \quad (1.1)$$

$i = 1, 2, \dots, m, \quad k = 1, 2, \dots, n.$

Dabei kann der Index  $(m, n)$  bei  $A$  und  $(a_{ik})$  auch weggelassen werden, wenn der Typ der Matrix entweder offensichtlich oder unwichtig ist.

Die in der Einleitung vorgestellten Beschreibungen eines Vektors durch eine Matrix setzen die Vereinbarung einer Basis voraus, der die Komponenten des Vektors (also die Elemente der Matrix) zugeordnet sind. Diese Basis besteht bis auf weiteres immer aus drei aufeinander senkrechten Einheitsvektoren  $e_1, e_2, e_3$ . (Eine andere gängige Bezeichnung für diese »Basisvektoren« ist  $i, j, k$ .)

Die Komponentendarstellung eines (physikalischen) Vektors  $v$  mit den (skalaren) Komponenten  $v_1, v_2, v_3$  zur Basis  $\{e_1, e_2, e_3\} = \{e_i\}$  lautet dann

$$v = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3. \quad (1.2)$$

Eine identische Darstellung dieses Vektors als Produkt zweier Matrizen ist (unter Benutzung der später erklärten Gesetze der Matrizenmultiplikation) so möglich:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \equiv v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3. \quad (1.3)$$

Die Komponentendarstellung eines Vektors ist also das Produkt aus der Zeilenmatrix seiner Komponenten und der Spaltenmatrix der benutzten Basisvektoren. (Zur Beschreibung dieser Basisvektoren kann man nicht auf eine andere Basis zurückgreifen, weil man dann vor der Aufgabe stünde, die Basisvektoren dieser neuen Basis zu beschreiben, was zu einer unendlichen Regression führen würde. Daher muss man die Lage der Basisvektoren bezüglich des jeweiligen Beobachters angeben. Dies kann z. B. durch die Vereinbarung geschehen, dass der Vektor  $e_1$  in der Zeichenebene des Beobachters liegt und nach rechts zeigt, der Vektor  $e_2$  ebenfalls in der Zeichenebene liegt und nach oben zeigt. Damit ist auch die Lage des Vektors  $e_3$  festgelegt, da er mit den ersten beiden Vektoren ein Rechtssystem bilden muss. Wir nehmen im Folgenden immer an, dass eine derartige Verabredung getroffen wurde.)

Aus dem so genannten Zeilenvektor der Algebra (in Wahrheit eine »Zeilenmatrix«) wird also erst durch Multiplikation mit der »Spaltenmatrix« ( $e_i$ ) ein physikalischer Vektor. Aus Gleichung 1.3 folgt auch, dass – entgegengesetzt zu häufigen Aussagen –

$$\mathbf{v} \neq (v_1 \quad v_2 \quad v_3) \text{ ist.}$$

Da die Komponentenmatrix eines Vektors nur für eine bestimmte Basis gilt, wird im Folgenden diese Basis immer als definiert vorausgesetzt.

Wir verabreden nun:

1. Die künftig als »Vektoren« bezeichneten Größen sind stets physikalische Vektoren, also gerichtete physikalische Größen.
2. Die Matrix der Komponenten eines Vektors  $\mathbf{v}$  wird als *Spaltenmatrix* geschrieben und mit  $(\mathbf{v}) = (v_i)$  bezeichnet.
3. Wenn aus zwingenden Gründen (z. B. bei der Multiplikation von Matrizen, siehe unten) die Komponentenmatrix eines Vektors als *Zeilenmatrix* geschrieben werden muss, benutzen wir für diese Zeilenmatrix die Bezeichnung  $(\mathbf{v})^T$ .  $(\mathbf{v})^T$  heißt die »transponierte Matrix« der ursprünglichen Matrix  $(\mathbf{v})$ . Aus

$$(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \text{ folgt also } (\mathbf{v})^T = (v_1 \quad v_2 \quad v_3) \text{ und umgekehrt.}$$

Damit folgt aus Gleichung 1.3:

$$\mathbf{v} = (v_1 \quad v_2 \quad v_3) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = (\mathbf{v})^T \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Beachte: Der Vektor  $\mathbf{v}$  bleibt unbeeinflusst davon, ob er durch eine Zeilenmatrix oder durch eine Spaltenmatrix vertreten wird, aber die beiden Matrizen sind schon darum nicht gleich, weil nach der Definition der Gleichheit (siehe unten) nur Matrizen vom selben Typ ( $m, n$ ) gleich sein können.

## 2.2 Grundlegende Definitionen

**Gleichheit zweier Matrizen:** Zwei Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  sind gleich, wenn sie vom selben Typ ( $m, n$ ) sind und alle einander entsprechenden Elemente der Matrizen gleich sind. Es ist also

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}, \text{ wenn für alle } i, k \text{ gilt: } a_{ik} = b_{ik}.$$

**Summe und Differenz zweier Matrizen:** Voraussetzung für die Existenz von Summe und Differenz ist, dass beide Matrizen vom gleichen Typ ( $m, n$ ) sind. Unter dieser Bedingung sind Summe und Differenz zweier Matrizen wieder je eine Matrix. Zur Bildung von Summe und Differenz werden einander entsprechende Elemente der beiden Matrizen addiert bzw. subtrahiert. Es ist also

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \mathbf{C}, \text{ wobei für alle } i, k \text{ gilt: } c_{ik} = a_{ik} \pm b_{ik}.$$

**Multiplikation einer Matrix  $A$  mit einem Skalar:** Das Produkt eines Skalars und einer Matrix ist wieder eine Matrix. Eine Matrix wird mit einem Skalar multipliziert, indem alle ihre Elemente mit dem Skalar  $k$  multipliziert werden. Es ist also

$$k\mathbf{A} = \mathbf{B}, \quad \text{wobei für alle } i, k \text{ gilt: } b_{ik} = ka_{ik}.$$

## 2.3 Weitere Rechengesetze

Auch die folgenden »Rechengesetze« sind keine Naturgesetze oder logisch ableitbare Vorschriften, sondern Ergebnisse von Verabredungen, die jedoch nicht willkürlich oder beliebig getroffen wurden, sondern – wie immer in der Mathematik – auf gewissen Grundsätzen und Vorüberlegungen beruhen, auf die hier jedoch nicht näher eingegangen werden soll.

### 2.3.1 Matrizenprodukte und Vektor-Matrix-Produkte

Das Produkt  $\mathbf{AB}$  zweier Matrizen  $A$  und  $B$  kann nur gebildet werden, wenn die Anzahl der *Spalten* von  $A$  gleich der Anzahl der *Zeilen* von  $B$  ist. Diese »**Verkettbarkeitsbedingung**« ergibt sich aus der folgenden Vorschrift zur Berechnung des Matrizenproduktes.

Allgemein gilt: **Das Produkt  $\mathbf{AB}$  zweier Matrizen ist eine Matrix  $C$ . Die Anzahl ihrer Zeilen ist gleich der Anzahl der Zeilen von  $A$ , die Anzahl ihrer Spalten gleich der Anzahl der Spalten von  $B$ .**

$$\mathbf{A}_{(m, n)} \mathbf{B}_{(n, p)} = \mathbf{C}_{(m, p)}$$

Die rote Markierung zeigt die Voraussetzung (Verkettbarkeitsbedingung) an, die blaue und die grüne zeigen den Einfluss der Zeilen- bzw. Spaltenzahl von  $A$  bzw.  $B$  auf das Ergebnis  $C$ .

**Rechenvorschrift:** Das Element  $c_{ik}$  der Produktmatrix ist das Skalarprodukt der  $i$ -ten Zeile von  $A$  mit der  $k$ -ten Spalte von  $B$ . (Über Skalarprodukte zweier Vektoren siehe unten.) Bei der Berechnung des Skalarprodukts werden die Zeilen und Spalten wie (physikalische) Vektoren behandelt, das heißt, die Elemente der Zeilen und Spalten denke man sich zunächst mit den entsprechenden Einheitsvektoren multipliziert, dann wird die eigentliche Multiplikation vorgenommen. Dabei gelten die einschlägigen Gesetze der Vektoralgebra:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1 \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = 0.$$

Wir begnügen uns hier mit dem Beispiel zweier  $3 \times 3$  Matrizen: Es seien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\mathbf{AB} = \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix},$$

wobei

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= \underbrace{(a_{11} \mathbf{e}_1 + a_{12} \mathbf{e}_2 + a_{13} \mathbf{e}_3)}_{\text{aus der 1. Zeile von } A} \cdot \underbrace{(b_{11} \mathbf{e}_1 + b_{21} \mathbf{e}_2 + b_{31} \mathbf{e}_3)}_{\text{aus der 1. Spalte von } B} \\
 &= a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} + a_{13} b_{31} \\
 &= \sum_{i=1}^3 a_{1i} b_{i1}, \\
 c_{12} &= \underbrace{(a_{11} \mathbf{e}_1 + a_{12} \mathbf{e}_2 + a_{13} \mathbf{e}_3)}_{\text{aus der 1. Zeile von } A} \cdot \underbrace{(b_{12} \mathbf{e}_1 + b_{22} \mathbf{e}_2 + b_{32} \mathbf{e}_3)}_{\text{aus der 2. Spalte von } B} \\
 &= a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} + a_{13} b_{32} \\
 &= \sum_{i=1}^3 a_{1i} b_{i2},
 \end{aligned}$$

Also ist das Produkt zweier 3 x 3 Matrizen  $A$  und  $B$

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

### 2.3.2 Spezialfall 1: Produkte zweier einreihiger Matrizen

Mit Rücksicht auf die Verkettbarkeit gibt es zwei Möglichkeiten. Die erste ist:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{11}b_{13} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{21}b_{13} \\ a_{31}b_{11} & a_{31}b_{12} & a_{31}b_{13} \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Das Produkt ist eine 3 x 3 Matrix. Sie wird uns wieder begegnen beim dyadischen Produkt zweier Vektoren. Die andere Möglichkeit ist

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}. \quad (1.7)$$

Wenn alle  $a_{ik}$ ,  $b_{ik}$  reelle Zahlen sind, ist das Ergebnis die Summe dreier reeller Zahlen, also ebenfalls eine reelle Zahl, die man auch als 1 x 1 Matrix interpretieren kann. Dieser Fall begegnet uns wieder beim Skalarprodukt zweier Vektoren.

### 2.3.3 Spezialfall 2: Produkte einer einreihigen Matrix mit einer 3 x 3 Matrix

Je nach der Stellung der einreihigen Matrix  $B$  zur 3 x 3 Matrix  $A$  sind wieder zwei Fälle zu unterscheiden, das »Vorprodukt« und das »Nachprodukt«.

#### 2.3.3.1 Das Vorprodukt

Das Vorprodukt  $BA$  kann wegen der Verkettbarkeitsbedingung nur gebildet werden, wenn  $B$  eine Zeilenmatrix ist. Dann ist

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Nach den Regeln der Matrizenmultiplikation ist das Ergebnis eine Zeilenmatrix:

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} b_1 a_{11} + b_2 a_{21} + b_3 a_{31} & b_1 a_{12} + b_2 a_{22} + b_3 a_{32} & b_1 a_{13} + b_2 a_{23} + b_3 a_{33} \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Ist die Matrix  $\mathbf{B}$  die transponierte Matrix  $(\mathbf{v})^T$  eines Vektors  $\mathbf{v}$ , dann wird die Zeilenmatrix in Gleichung 1.9 (mit  $b_i$  ersetzt durch  $v_i$ ) als die transponierte Matrix  $(\mathbf{w})^T$  eines Vektors  $\mathbf{w}$  interpretiert.

$$(\mathbf{w})^T = (\mathbf{v})^T \mathbf{A} = \begin{pmatrix} v_1 a_{11} + v_2 a_{21} + v_3 a_{31} & v_1 a_{12} + v_2 a_{22} + v_3 a_{32} & v_1 a_{13} + v_2 a_{23} + v_3 a_{33} \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

Für den Vektor  $\mathbf{w}$  selbst gilt dann

$$\mathbf{w} = (\mathbf{w})^T \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = [(\mathbf{v})^T \mathbf{A}] \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

$$\mathbf{w} = (\mathbf{w})^T \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = (v_1 a_{11} + v_2 a_{21} + v_3 a_{31}) \mathbf{e}_1 + (v_1 a_{12} + v_2 a_{22} + v_3 a_{32}) \mathbf{e}_2 + (v_1 a_{13} + v_2 a_{23} + v_3 a_{33}) \mathbf{e}_3. \quad (1.12)$$

Das **Vorprodukt des Vektors  $\mathbf{v}$**  und der Matrix  $\mathbf{A}$  wird dann als dieser Vektor definiert:

$$\mathbf{v} \mathbf{A} \stackrel{\text{Def}}{=} \mathbf{w} \equiv [(\mathbf{v})^T \mathbf{A}] \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

Da runde Klammern zur Kennzeichnung von Matrizen dienen, wird die Reihenfolge der Multiplikationen durch eckige Klammern geregelt.

### 2.3.3.2 Das Nachprodukt

Hier muss wegen der Verkettbarkeitsbedingung die Matrix  $\mathbf{B}$  als Spaltenmatrix geschrieben werden:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}. \quad (1.14)$$

Das Ergebnis ist nach den Regeln der Matrizenmultiplikation eine Spaltenmatrix:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} a_{11} b_1 + a_{12} b_2 + a_{13} b_3 \\ a_{21} b_1 + a_{22} b_2 + a_{23} b_3 \\ a_{31} b_1 + a_{32} b_2 + a_{33} b_3 \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Ist die Matrix  $\mathbf{B}$  die Spaltenmatrix  $(\mathbf{v})$  eines Vektors  $\mathbf{v}$ , dann wird die Spaltenmatrix in Gleichung 1.14 (mit  $b_i$  ersetzt durch  $v_i$ ) als die Spaltenmatrix  $(\mathbf{w})$  eines Vektors  $\mathbf{w}$  interpretiert. Für den Vektor selbst gilt dann

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w} &= (\boldsymbol{w})^T \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = [\boldsymbol{A}(\boldsymbol{v})]^T \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} \\ &= (a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + a_{13}v_3)\boldsymbol{e}_1 + (a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + a_{23}v_3)\boldsymbol{e}_2 + (a_{31}v_1 + a_{32}v_2 + a_{33}v_3)\boldsymbol{e}_3. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Das **Nachprodukt des Vektors  $\boldsymbol{v}$  und der Matrix  $\boldsymbol{A}$**  wird dann als dieser Vektor definiert:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} \stackrel{\text{Def}}{=} \boldsymbol{w} \equiv [\boldsymbol{A}(\boldsymbol{v})]^T \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix}. \quad (1.17)$$

### 2.3.3.3 Übungen

#### Übung 1.1

Beweisen Sie, dass  $\boldsymbol{v}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{v}$ , wobei

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die 3 x 3 Einheitsmatrix und  $\boldsymbol{v}$  ein beliebiger Vektor ist.

#### Übung 1.2

Beweisen Sie die Distributivität des Vorprodukts:

$$\boldsymbol{v}[\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}] = \boldsymbol{v}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{v}\boldsymbol{B}, \quad (1.18)$$

wobei  $\boldsymbol{A}$  und  $\boldsymbol{B}$  3 x 3 Matrizen sind und  $\boldsymbol{v}$  ein Vektor ist.

#### Übung 1.3

Beweisen Sie:

$$\boldsymbol{v}[\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}] = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\boldsymbol{A}.$$

$\boldsymbol{E}$  = Einheitsmatrix

#### Übung 1.4

Beweisen Sie:  $\boldsymbol{E}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ , wobei  $\boldsymbol{E}$  die 3 x 3 Einheitsmatrix und  $\boldsymbol{v}$  ein Vektor ist

#### Übung 1.5

Beweisen Sie die Distributivität des Nachprodukts:

$$[\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}]\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{v}, \quad (1.19)$$

wobei  $\boldsymbol{A}$  und  $\boldsymbol{B}$  3 x 3 Matrizen sind und  $\boldsymbol{v}$  ein Vektor ist.

## Übung 1.6

Beweisen Sie:

$$[\mathbf{E} + \mathbf{A}]\mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{v},$$

wobei  $\mathbf{v}$  ein Vektor,  $\mathbf{A}$  eine  $3 \times 3$  Matrix und  $\mathbf{E}$  die  $3 \times 3$  Einheitsmatrix ist.

## 2.4 Produkte von Vektoren

Es gibt drei Arten von Produkten von je zwei Vektoren:

- Das Skalarprodukt,
- das Vektorprodukt und
- das dyadische Produkt,

wovon das Vektorprodukt hier nicht benötigt wird.

### 2.4.1 Das Skalarprodukt

In der Vektoralgebra wird das Skalarprodukt  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$  zweier Vektoren im Hinblick auf physikalische Belange basisunabhängig so definiert:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v w \cos \varphi, \quad (1.20)$$

wobei  $v$  und  $w$  die Beträge der beiden Vektoren sind und  $\varphi$  der von ihnen eingeschlossene Winkel ist.

Beschreibt man die Vektoren durch ihre Komponenten bezüglich einer Basis  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ , dann erhält man für ihr Skalarprodukt formal die Gleichung

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3) \cdot (w_1 \mathbf{e}_1 + w_2 \mathbf{e}_2 + w_3 \mathbf{e}_3). \quad (1.21)$$

In der Vektoralgebra wird gezeigt, dass die skalare Multiplikation distributiv ist. Daher können die Klammern nach den Regeln der Algebra ausmultipliziert werden. Berücksichtigt man dabei, dass

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1, \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0,$$

was sich aus der Definitionsgleichung 1.20 für  $\varphi = 0^\circ$  bzw.  $90^\circ$  ergibt, so erhält man

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3. \quad (1.22)$$

Die rechte Seite der Gleichung 1.22 ist identisch mit dem Produkt der Zeilenmatrix  $(\mathbf{v})^T$  und der Spaltenmatrix  $(\mathbf{w})$ :

$$v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = (\mathbf{v})^T (\mathbf{w}).$$

Also gilt:

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = v w \cos \varphi = (\mathbf{v})^T (\mathbf{w}). \quad (1.23)$$

## 2.4.2 Das dyadische Produkt

Das dyadische Produkt (kurz: Dyade) zweier Vektoren  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{w}$  wird geschrieben

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$$

und gelesen:  $\mathbf{v}$  mal im Kreis  $\mathbf{w}$ .

Wie die beiden Vektoren ist auch ihr dyadisches Produkt von der benutzten Basis unabhängig. Bei der unten folgenden Definition des dyadischen Produkts wird die Komponentendarstellung der beteiligten Vektoren bezüglich einer bestimmten Basis benutzt, und daher ist auch das Ergebnis eine basisabhängige Größe, und zwar eine Matrix. (Beim dyadischen Produkt gibt es – anders als beim Skalar- und Vektorprodukt – keine *unmittelbar anschauliche* basisunabhängige Definition, die nur auf den ursprünglichen Eigenschaften der beiden Vektoren beruht.)

### Definition:

Haben die Vektoren  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{w}$  in einem bestimmten Basissystem die Komponenten  $(v_1, v_2, v_3)$  und  $(w_1, w_2, w_3)$ , ist also

$$\mathbf{v} = (v_1 \quad v_2 \quad v_3) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = (\mathbf{v})^T \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = (w_1 \quad w_2 \quad w_3) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = (\mathbf{w})^T \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}, \quad (1.24)$$

dann ist die Matrix des dyadischen Produkts der beiden Vektoren bezüglich der benutzten Basis

$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) \stackrel{\text{Def.}}{=} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} (w_1 \quad w_2 \quad w_3) = (\mathbf{v})(\mathbf{w})^T. \quad (1.25)$$

Durch Ausmultiplizieren erhält man nach Gleichung 1.6

$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} v_1 w_1 & v_1 w_2 & v_1 w_3 \\ v_2 w_1 & v_2 w_2 & v_2 w_3 \\ v_3 w_1 & v_3 w_2 & v_3 w_3 \end{pmatrix}. \quad (1.26)$$

Die Matrix einer Dyade ist also eine 3 x 3 Matrix.

## 2.5 Rechengesetze für Dyaden

### 2.5.1 Multiplikation einer Dyade mit einem Skalar

Matrizen werden mit einem Skalar multipliziert, indem alle ihre Elemente  $v_i w_k$  mit diesem Skalar multipliziert werden. Dabei ist die Reihenfolge der Faktoren beliebig. Dieses für die *Matrix* einer Dyade geltende Gesetz kann auf die Dyade *selbst* übertragen werden, indem man vereinbart:

$$k[\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}] = [k\mathbf{v}] \otimes \mathbf{w} = \mathbf{v} \otimes [k\mathbf{w}] = [\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}]k. \quad (1.27)$$

Anmerkung: Die eckigen Klammern dienen hier und im Folgenden wieder dazu, die Reihenfolge der Multiplikationen zu regeln. (Runde Klammern werden zur Kennzeichnung von Matrizen benutzt.)

## 2.5.2 Multiplikation einer Dyade mit einem Vektor

Auch hier müssen wir zwischen Vorprodukt und Nachprodukt unterscheiden.

### 2.5.2.1 Das Vorprodukt

Das Vorprodukt eines Vektors  $\mathbf{u}$  mit dem dyadischen Produkt aus  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{w}$  ist das Produkt

$$\mathbf{u}[\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}].$$

**Definition:** Die Matrix des Vorprodukts ist (wegen der Verkettbarkeitsbedingung) gleich dem Vorprodukt aus der transponierten Matrix  $(\mathbf{u})^T$  des Vektors  $\mathbf{u}$  und der Matrix der Dyade:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u}[\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}]) &\stackrel{\text{Def}}{=} (\mathbf{u})^T (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 w_1 & v_1 w_2 & v_1 w_3 \\ v_2 w_1 & v_2 w_2 & v_2 w_3 \\ v_3 w_1 & v_3 w_2 & v_3 w_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_1 v_1 w_1 + u_2 v_2 w_1 + u_3 v_3 w_1 & u_1 v_1 w_2 + u_2 v_2 w_2 + u_3 v_3 w_2 & u_1 v_1 w_3 + u_2 v_2 w_3 + u_3 v_3 w_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.28)$$

Diese Zeilenmatrix wird interpretiert als die transponierte Matrix  $(\mathbf{t})^T$  eines Vektors  $\mathbf{t}$ , für den dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= (\mathbf{t})^T \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \\ &= (u_1 v_1 w_1 + u_2 v_2 w_1 + u_3 v_3 w_1) \mathbf{e}_1 + (u_1 v_1 w_2 + u_2 v_2 w_2 + u_3 v_3 w_2) \mathbf{e}_2 + (u_1 v_1 w_3 + u_2 v_2 w_3 + u_3 v_3 w_3) \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Das Vorprodukt des Vektors  $\mathbf{u}$  und der Dyade  $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$  wird nun definiert als dieser Vektor:

$$\mathbf{u}[\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}] \stackrel{\text{Def}}{=} \mathbf{t} \equiv [(\mathbf{u})^T (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})] \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}. \quad (1.30)$$

Für die letzte Zeile in 1.29 kann man mit Hilfe von Skalarprodukten schreiben

$$\mathbf{t} = [\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}] w_1 \mathbf{e}_1 + [\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}] w_2 \mathbf{e}_2 + [\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}] w_3 \mathbf{e}_3 = [\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}] \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}.$$

Das Skalarprodukt  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  ist eine reelle Zahl  $k$ ; das sich anschließende Matrizenprodukt ist der Vektor  $\mathbf{w}$ . Also ist

$$\mathbf{t} = [\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}] \mathbf{w} = k \mathbf{w},$$

und somit

$$\mathbf{u}[\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}] = k \mathbf{w}. \quad (1.31)$$

Das Vorprodukt eines Vektors und einer Dyade ist also ein Vektor vom  $k$ -fachen Betrag des zweiten Vektors der Dyade, wobei  $k$  gleich dem Skalarprodukt aus dem »Vorvektor«  $\mathbf{u}$  und dem ersten Vektor der Dyade ist.

### 2.5.2.2 Das Nachprodukt

Das Nachprodukt eines Vektors  $\mathbf{u}$  mit dem dyadischen Produkt aus  $\mathbf{v}$  und  $\mathbf{w}$  ist das Produkt

$$[\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}] \mathbf{u}.$$

**Definition:** Die Matrix des Nachprodukts ist gleich dem Nachprodukt der Matrix ( $\mathbf{u}$ ) des Vektors  $\mathbf{u}$  und der Matrix der Dyade:

$$([\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}] \mathbf{u}) \stackrel{\text{Def}}{=} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})(\mathbf{u}) \quad (1.32)$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})(\mathbf{u}) &= \begin{pmatrix} v_1 w_1 & v_1 w_2 & v_1 w_3 \\ v_2 w_1 & v_2 w_2 & v_2 w_3 \\ v_3 w_1 & v_3 w_2 & v_3 w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_1 w_1 u_1 + v_1 w_2 u_2 + v_1 w_3 u_3 \\ v_2 w_1 u_1 + v_2 w_2 u_2 + v_2 w_3 u_3 \\ v_3 w_1 u_1 + v_3 w_2 u_2 + v_3 w_3 u_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Diese Spaltenmatrix wird interpretiert als die Matrix eines Vektors  $\mathbf{t}$ , für den dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= (\mathbf{t})^T \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \\ &= (v_1 w_1 u_1 + v_1 w_2 u_2 + v_1 w_3 u_3) \mathbf{e}_1 + (v_2 w_1 u_1 + v_2 w_2 u_2 + v_2 w_3 u_3) \mathbf{e}_2 \\ &\quad + (v_3 w_1 u_1 + v_3 w_2 u_2 + v_3 w_3 u_3) \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (1.34)$$

Das Nachprodukt des Vektors  $\mathbf{u}$  und der Dyade  $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$  wird nun definiert als dieser Vektor:

$$[\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}] \mathbf{u} \stackrel{\text{Def}}{=} \mathbf{t} \equiv [(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})(\mathbf{u})]^T \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}. \quad (1.35)$$

Nach Ausklammern von  $v_i$  kann die Gleichung 1.34 so geschrieben werden

$$\mathbf{t} = [\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}] v_1 \mathbf{e}_1 + [\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}] v_2 \mathbf{e}_2 + [\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}] v_3 \mathbf{e}_3 = [\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}] \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$$

und schließlich

$$\mathbf{t} = [\mathbf{w} \cdot \mathbf{u}] \mathbf{v} = k \mathbf{v}.$$

Also ist

$$[\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}] \mathbf{u} = k \mathbf{v}. \quad (1.36)$$

Das Nachprodukt ist also ein Vektor vom  $k$ -fachen Betrag des ersten Vektors der Dyade, wobei  $k$  das Skalarprodukt des zweiten Vektors der Dyade und des »Nachvektors«  $\mathbf{u}$  ist.

### 3 Lösungen

#### Übung 1.1

Nach Gleichung 1.10 ist

$$(\mathbf{v}\mathbf{E}) = (\mathbf{v})^T \mathbf{E} = (v_1 \ v_2 \ v_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (v_1 \ v_2 \ v_3).$$

Nach Gleichung 1.13 ist dann

$$\mathbf{v}\mathbf{E} = (v_1 \ v_2 \ v_3) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \mathbf{v}.$$

#### Übung 1.2

Setzt man

$$\mathbf{v}\mathbf{A} = \mathbf{u}, \quad \mathbf{v}\mathbf{B} = \mathbf{w}, \quad \mathbf{v}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{t},$$

dann ist nach Gleichung 1.3 und 1.12

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u})^T \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = (v_1 a_{11} + v_2 a_{21} + v_3 a_{31}) \mathbf{e}_1 + (v_1 a_{12} + v_2 a_{22} + v_3 a_{32}) \mathbf{e}_2 \\ + (v_1 a_{31} + v_2 a_{32} + v_3 a_{33}) \mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{w} = (\mathbf{w})^T \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = (v_1 b_{11} + v_2 b_{21} + v_3 b_{31}) \mathbf{e}_1 + (v_1 b_{12} + v_2 b_{22} + v_3 b_{32}) \mathbf{e}_2 \\ + (v_1 b_{31} + v_2 b_{32} + v_3 b_{33}) \mathbf{e}_3,$$

und wegen

$$\mathbf{t} = (\mathbf{t})^T \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = [v_1 (a_{11} + b_{11}) + v_2 (a_{21} + b_{21}) + v_3 (a_{31} + b_{31})] \mathbf{e}_1 + \text{usw.}$$

Addiert man die Komponentendarstellungen von  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{w}$ , erhält man die gleichen Komponenten. Also ist

$$\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{t}.$$

**Übung 1.3** Es ist (siehe Übungen 1.1 und 1.2)

$$\mathbf{v}(\mathbf{E} + \mathbf{A}) = \mathbf{v}\mathbf{E} + \mathbf{v}\mathbf{A} = \mathbf{v} + \mathbf{v}\mathbf{A}.$$

### Übung 1.4

Es ist

$$(\mathbf{E}\mathbf{v}) = \mathbf{E}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \mathbf{v}.$$

und folglich  $\mathbf{E}\mathbf{v} = \mathbf{v}$ .

### Übung 1.5

Wir setzen

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{u}, \quad \mathbf{B}\mathbf{v} = \mathbf{w}, \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{v} = \mathbf{t}$$

und berechnen und vergleichen wie bei Übung 1.2 die Matrizen  $(\mathbf{u})$ ,  $(\mathbf{v})$  und  $(\mathbf{t})$ .

### Übung 1.6

Es ist wegen der Distributivität des Nachprodukts

$$(\mathbf{E} + \mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{E}\mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{A}\mathbf{v}.$$

[Weiter zu Tensorrechnung II](#)

[Home](#)

[Rückmeldungsformular/Gästebuch](#)