Einführung
in die
Theoretische Physik

Der elektrische Strom – Wesen und Wirkungen
Teil IV: Elektromagnetische Wellen

Siegfried Petry

Fassung vom 25. Oktober 2010

I n h a l t :

1 Elektromagnetische Wellen in nicht leitenden Medien

1.1 Die Wellengleichung

Für in unserem Bezugssystem ruhende, isotrope, nicht leitende Medien gelten die im letzten Kapitel von Teil III aufgeführten Gleichungen in der Form

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \varepsilon_r\varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\mu_r\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}. \tag{2}$$

Ferner gilt

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0, \tag{3}$$

und wenn keine Raumladungen vorhanden sind, was wir jetzt voraussetzen wollen,

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 0. \tag{4}$$

Zur Lösung der Gleichungen eliminieren wir zunächst $\boldsymbol{H}$. Dazu differenzieren wir die Gleichung 1 nach t und berechnen die Rotation der Gleichung 2. Da der betrachtete Körper ruht, sind die Differentiationen nach der Zeit und nach dem Ort (hier: Rotationsbildung) vertauschbar.

$$\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = \operatorname{rot}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \varepsilon_r\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}, \tag{5}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\mu_r\mu_0 \operatorname{rot}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}. \tag{6}$$

Nach einem Satz der Vektoranalysis ist

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{E} - \Delta\boldsymbol{E}.$$

(Wegen der Bedeutung von Δ siehe unten.) Da nach Voraussetzung div $\boldsymbol{E} = 0$ ist, folgt daraus

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\Delta\boldsymbol{E}. \tag{7}$$

Andererseits ist nach Gleichung 6 bzw. 5

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\mu_r\mu_0 \operatorname{rot}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \quad \text{und} \quad \operatorname{rot}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \varepsilon_r\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

Somit ist schließlich

$$\Delta\boldsymbol{E} = \varepsilon_r\varepsilon_0\mu_r\mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}. \tag{8}$$

Dabei ist Δ der LAPLACE-Operator, das skalare Produkt des Nabla-Operators mit sich selbst. Auf Vektoren angewendet, bedeutet er

$$\Delta\boldsymbol{E} = (\nabla\nabla)\boldsymbol{E} = \Delta E_x\boldsymbol{e}_1 + \Delta E_y\boldsymbol{e}_2 + \Delta E_z\boldsymbol{e}_3$$

oder ausgeschrieben

$$\Delta\boldsymbol{E} = \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{e}_2 + \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{e}_3$$

Die Gleichung

$$\Delta \boldsymbol{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{9}$$

ist die Differentialgleichung für die wellenartige Ausbreitung des Vektors $\boldsymbol{E}$ im Raum, wobei sowohl der örtliche wie der zeitliche Verlauf der Welle einer Sinuskurve folgt. Durch diese Differentialgleichung wird eine riesige Mannigfaltigkeit von Wellenphänomenen beschrieben. Wie immer bei einer Differentialgleichung kommt es darauf an, die für bestimmte Gegebenheiten passende Lösung auszuwählen.

1.2 Die ebene Lösung der Wellengleichung

Ich beschränke mich nun auf einen besonders wichtigen und charakteristischen Fall, nämlich auf den einer homogenen ebenen Welle. Das ist eine Welle, die sich in einem räumlich unbegrenzten Medium mit einer ebenen Wellenfront linear ausbreitet, zum Beispiel in Richtung der X-Achse. In allen Punkten einer beliebigen Ebene senkrecht zur X-Achse hat dann die Feldstärke $\boldsymbol{E}$ jeweils denselben Wert. Innerhalb einer solchen Ebene ändert sich also $\boldsymbol{E}$ in *Y*- und *Z*-Richtung nicht, was mathematisch bedeutet, dass überall

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial y} = \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial z} = 0$$

ist. Dies gilt natürlich auch für die entsprechenden Ableitungen aller Komponenten von $\boldsymbol{E}$. In Anbetracht dessen und wegen

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

wird auch

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0.$$

Das betrachtete elektrische Feld kann also keine Komponente in *X*-Richtung haben, es sei denn, diese wäre konstant. Ein solcher Fall (eines konstanten Feldes) interessiert uns aber hier nicht. Es sei also $E_x = 0$.

Durch ein ganz analoges Vorgehen beim Eliminieren von $\boldsymbol{E}$ ergibt sich $H_x = 0$. Folglich ist die betrachtete Welle eine Transversalwelle: Die Schwingungen von $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{H}$ finden nur senkrecht zur Ausbreitungsrichtung statt. (Wie erkennbar, ist dies eine Folge der Quellenfreiheit der beiden Felder.)

Von der Gleichung 9 bleiben nach dem oben Gesagten nur zwei Gleichungen übrig:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} \quad \text{mit } a^2 = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0.$$

Die Welle kann natürlich aus einer Überlagerung von beliebig vielen Wellen mit unterschiedlichen Frequenzen bestehen, wie das z. B. beim Sonnenlicht der Fall ist. Es genügt hier jedoch, wenn wir uns auf eine »monochromatische« Welle beschränken, das heißt auf eine Welle mit einer einzigen Frequenz. Dann lautet der allgemeine Lösungsansatz:

$$E_y = f(x)\mathrm{e}^{i\omega t}, \quad E_z = g(x)\mathrm{e}^{i(\omega t + \delta)}.$$

Durch zweimaliges Differenzieren, Einsetzen und Kürzen durch die Exponentialfunktion erhalten wir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\omega^2 a^2 f=0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\omega^2 a^2 g=0.$$

Die Lösungen dieser uns vertrauten Schwingungsdifferentialgleichungen sind

$$f=A\mathrm{e}^{\pm i\omega a x} \quad \text{und} \quad g=B\mathrm{e}^{\pm i\omega a x}.$$

Wählen wir das positive Vorzeichen des Exponenten, dann ist der Phasenwinkel $\omega\, a\, x$ umso größer, je größer x ist und umgekehrt. Folglich breitet sich die Welle längs der X-Achse nach links aus. Wählen wir das negative Vorzeichen, breitet sich die Welle längs der X-Achse nach rechts aus. Wir entscheiden uns für diesen zweiten Fall. Dann wird

$$E_y=A\mathrm{e}^{i\omega(t-a x)} \quad \text{und} \quad E_z=B\mathrm{e}^{i\omega(t-a x)+i\delta}$$

oder einfacher

$$E_y=A\sin\omega(t-a x) \quad \text{und} \quad E_z=B\sin[\omega(t-a x)+\delta].$$

Wie eine einfache Überlegung zeigt, ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit v der Welle

$$v=\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r\varepsilon_0\mu_r\mu_0}}.$$

Im Vakuum ist

$$v=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}.$$

Durch Einsetzen der Werte für ε_0 und μ_0 ergibt sich die Vakuumlichtgeschwindigkeit c = 300 000 km/s.

Die Amplituden von E_y und E_z hängen von den Erzeugungsbedingungen der Welle ab, ebenso ihr Phasenverschiebungswinkel δ. Für $\delta = 0$ ist die Welle linear polarisiert, anderenfalls ist sie elliptisch polarisiert. (Letzteres bedeutet: Der Endpunkt des Vektors $\boldsymbol{E}$ läuft auf einer Ellipse herum.)

Bei der Berechnung von $\boldsymbol{H}$ beschränke ich mich auf eine linear polarisierte Welle mit $E_z = 0$.

Unter dieser Voraussetzung ergibt sich aus

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=-\mu_r\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}:$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t}=0, \quad \mu_r\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial t}=-\frac{\partial E_y}{\partial x}=A a\,\omega\cos\omega(t-a x).$$

Integriert:

$$H_y=0, \quad H_z=\frac{A a\,\omega}{\mu_r\mu_0}\frac{1}{\omega}\sin\omega(t-a x)=\sqrt{\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0}{\mu_r\mu_0}}\,E_y.$$

Die additiven Integrationskonstanten wurden gleich null gesetzt, da sie konstante Felder darstellen, die hier uninteressant sind.

Das magnetische Feld steht also bei einer linear polarisierten Welle auf dem elektrischen Feld senkrecht und schwingt mit diesem phasengleich. Wenn sich die Welle in $+X$-Richtung ausbreitet, hat das elektrische Feld die Richtung der $+Y$-Achse, das magnetische Feld die Richtung der $+Z$-Achse.

1.3 Die Energiedichte der elektromagnetischen Welle und der POYNTING-Vektor

Die Energiedichte $w = \mathrm{d}W/\mathrm{d}V$ im Raum einer elektromagnetischen Welle setzt sich zusammen aus der Energiedichte des elektrischen Feldes und der des magnetischen Feldes und beträgt daher

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\mu_r\mu_0 H^2.$$

Wegen

$$H = \sqrt{\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0}{\mu_r\mu_0}}\,E$$

kann man dafür auch schreiben

$$w = \varepsilon_r\varepsilon_0 E^2 = \mu_r\mu_0 H^2.$$

Dabei sind E und H die jeweiligen Momentanwerte der Feldstärken. Wie man sieht, verteilt sich die Gesamtenergie zu gleichen Teilen auf das elektrische und das magnetische Feld.

Da die Welle im Raum fortschreitet, wobei sich die »Wellenberge« und »Wellentäler« in Ausbreitungsrichtung verschieben, transportiert die Welle Energie in dieser Richtung mit der Geschwindigkeit c_m (Lichtgeschwindigkeit im Medium). Betrachten wir einen hinreichend kleinen Quader von der Länge $\mathrm{d}x = c_m\,\mathrm{d}t$ und dem Querschnitt $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. Er enthält die Energie $\mathrm{d}W = w\,c_m\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. In der Zeit $\mathrm{d}t$ durchströmt diese Energie die vordere Stirnfläche des Quaders. Die auf den Querschnitt und die Zeit bezogene Energie ist dann

$$S = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}y\cdot\mathrm{d}z\cdot\mathrm{d}t} = w c_m = \varepsilon_r\varepsilon_0 E^2\,c_m = \mu_r\mu_0 H^2\,c_m.$$

Mit

$$E = \sqrt{\frac{\mu_r\mu_0}{\varepsilon_r\varepsilon_0}}\,H$$

ergibt sich daraus

$$S = E\,H.$$

Diese Größe S heißt Intensität oder Energiestromdichte der Welle am betrachteten Ort. Der dazu gehörige Vektor, der parallel zur Ausbreitungsrichtung der Welle ist, heißt POYNTING-Vektor $\boldsymbol{S}$:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}.$$

2 Elektromagnetische Wellen in leitenden Medien

Wegen der etwas komplizierten Rechnungen führe ich zunächst folgende Abkürzungen ein:

$$\varepsilon_r \, \varepsilon_0 = \varepsilon \, , \quad \mu_r \, \mu_0 = \mu .$$

Da Verwechslungen hier ausgeschlossen sind, bezeichne ich die elektrische Leitfähigkeit $1/\rho$ wie üblich mit σ.

Dann lauten die Feldgleichungen für den Fall, dass die Leitfähigkeit des Mediums nicht verschwindend klein ist,

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \sigma \boldsymbol{E}, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{E} = \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0.$$

Eliminiert man wieder wie oben $\boldsymbol{H}$, so ergibt sich

$$\Delta \boldsymbol{E} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}.$$

Wieder beschränke ich mich auf ebene Wellen, die sich in Richtung der $+X$-Achse ausbreiten, sodass alle partiellen Ableitungen nach y und z gleich null sind, woraus sich $E_x = H_x = 0$ ergibt. Außerdem sei die Welle linear polarisiert ($E_z = 0$). Für eine zudem monochromatische Welle lautet dann der Ansatz:

$$E_y = f(x) \mathrm{e}^{i\omega t}. \tag{10}$$

Daraus folgt:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t} = -\omega^2 f(x) \mathrm{e}^{i\omega t}$$

und somit

$$\left(\Delta \boldsymbol{E}\right)_y = \left(-\varepsilon \mu \omega^2 + i \omega \mu \sigma\right) f(x) \mathrm{e}^{i\omega t}.$$

Andererseits ist

$$\left(\Delta \boldsymbol{E}\right)_y = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \mathrm{e}^{i\omega t}$$

und daher schließlich

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left(\varepsilon \mu \omega^2 - i \omega \mu \sigma\right) f(x) = 0.$$

Dies ist formal die Differentialgleichung einer harmonischen Schwingung, jedoch mit einem komplexen Koeffizienten. Mit dem Ansatz:

$$f(x) = A \mathrm{e}^{ikx}$$

findet man

$$k = \pm \sqrt{\varepsilon \mu \omega^2 - i \mu \sigma \omega}$$

(Ich bezeichne die Konstante hier mit k, weil der Buchstaben a später für eine andere Größe gebraucht wird.) Für $\sigma = 0$ ergibt sich daraus der gleiche Wert wie für die Welle in nicht leitenden Medien. Aus demselben Grund wie dort wählen wir auch hier das negative Vorzeichen und erhalten so

$$f(x) = A\mathrm{e}^{-i\sqrt{\varepsilon\mu\omega^2 - i\mu\sigma\omega x}}.$$

Zur weiteren Diskussion des Ergebnisses müssen wir die Wurzel im Exponenten untersuchen. Mit

$$\varepsilon\,\mu\,\omega^2 = a$$

$$\mu\,\sigma\,\omega = b$$

wird

$$k = -\sqrt{a - i\,b}$$

und nach dem Gesetz für die Berechnung von Wurzeln aus komplexen Zahlen

$$k = -\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right) = -(p - i\,q),$$

wobei p und q die Abkürzungen für die beiden Wurzelausdrücke sind. Damit wird

$$f(x) = A\mathrm{e}^{-i(p-iq)x} = A\mathrm{e}^{-i\,px}\,\mathrm{e}^{-qx}.$$

Setzen wir dies in die Gleichung (10) ein, erhalten wir schließlich

$$E_y = A\mathrm{e}^{-qx}\,\mathrm{e}^{i(\omega t - px)}$$

oder einfacher wieder

$$E_y = A\mathrm{e}^{-qx}\sin(\omega t - p\,x).$$

Dies ist die Gleichung einer gedämpften Welle mit dem »Dämpfungsfaktor« q und der Geschwindigkeit $v = 1/p$. Die Amplitude der Welle nimmt also auf der Strecke $x = 1/q$ jeweils auf den e-ten Teil ab.

Zur Berechnung von $\boldsymbol{H}$ gehen wir wieder aus von

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{1}{\mu}A(q + ip)\,\mathrm{e}^{-qx}\,\mathrm{e}^{i(\omega t - px)}.$$

Daraus folgt

$$H_z = \frac{1}{\mu}\frac{q + i\,p}{i\omega}A\mathrm{e}^{-qx}\,\mathrm{e}^{i(\omega t - px)} = \frac{1}{\mu\omega}(p - iq)E_y.$$

Die komplexe Zahl $p - iq$ kann dargestellt werden als

$$p - iq = (p^2 + q^2)\,\mathrm{e}^{-i\delta} \quad \text{mit} \quad \tan\delta = \frac{p}{q}.$$

Damit wird

$$H_z = \frac{p^2 + q^2}{\mu\,\omega}\mathrm{e}^{-i\delta}\,E_y = \frac{p^2 + q^2}{\mu\,\omega}A\mathrm{e}^{-qx}\,\mathrm{e}^{i(\omega t - px - \delta)}.$$

In leitenden Medien ist also der magnetische Feldvektor gegenüber dem elektrischen um den Winkel $-\,\delta$ phasenverschoben.