

# **Das »Zwillingsparadoxon«**

## **Einmal genau betrachtet**

Siegfried Petry

Fassung vom 27. Dezember 2010

## Das »Zwillingsparadoxon« – einmal genau betrachtet

Bei der mathematischen Behandlung des so genannten Zwillingsparadoxons – das in Wirklichkeit keines ist – werden im Allgemeinen die Beschleunigungs- und Bremsphasen zu Beginn, bei der Umkehr und am Ende der Reise vernachlässigt. Dabei sind – wie sich zeigen wird – gerade sie die Ursachen des gesamten Phänomens. Und nur dadurch, dass sie berücksichtigt und genauer untersucht werden, lässt sich der Vorgang befriedigend erklären und das Paradoxon auflösen.

Betrachten wir die Sache also einmal etwas genauer. Dabei genügt es, nur die Hinreise zu untersuchen, da die Rückreise als ihr Spiegelbild betrachtet werden kann. Bekanntlich entsteht das (scheinbare) Paradoxon erst dann, wenn man den Vorgang auch aus der Sicht des reisenden Zwillings betrachtet, der angeblich aus Symmetriegründen mit Recht behaupten könne, der daheim gebliebene Bruder sei weniger gealtert. Daher muss – wenn man die Kritiker Einsteins überzeugen und seinen Anhängern stichhaltige Argumente liefern will – das Geschehen aus beiden Perspektiven betrachtet werden.

### 1 Allgemeine Überlegungen

Gegeben seien zwei zunächst relativ zueinander ruhende Bezugssysteme  $S$  und  $S'$ , welche durch eine  $X$ -Achse bzw. eine  $X'$ -Achse repräsentiert werden. Die beiden Achsen liegen aufeinander, ihre Ursprünge (Nullpunkte)  $O$  und  $O'$  koinzidieren und die Uhren in beiden Systemen sind synchronisiert. Dann wird  $S'$  beschleunigt usw. Fortan sind die beiden Brüder unterschiedlicher Auffassung darüber, ob zwei Ereignisse, die an *verschiedenen* Orten auftreten, gleichzeitig sind oder nicht. (Diese unterschiedliche Auffassung der Gleichzeitigkeit ist die Ursache der relativistischen Effekte „Zeitdilatation“ und „Lorentz-Kontraktion“, die beide nur aus der Sicht des Beobachters im jeweils anderen System existieren.)

Ein Vergleich der Reisezeiten ist erst wieder möglich, wenn entweder die Ursprünge  $O$  und  $O'$  koinzidieren, oder die beiden Beobachter sich über die Gleichzeitigkeit einig sind, was gleiche Geschwindigkeit voraussetzt (sonst nichts).

Im ersten Fall (Koinzidenz von  $O$  und  $O'$ ) ist es gleichgültig, ob die Beobachter noch relativ zu einander bewegt sind oder nicht, weil die Uhren in  $O$  und  $O'$  sich dann am selben Ort befinden. Jeder Beobachter ( $B$  und  $B'$ ) kann seine eigene Uhr mit der im anderen System vergleichen, und es kann keine Meinungsverschiedenheit über das Ergebnis geben. System  $S'$  braucht in diesem Fall nicht abgebremst zu werden, es genügt ein »Vorbeiflug« von  $O'$  an  $O$ .

Im zweiten Fall (keine Relativgeschwindigkeit und daher Einigkeit bezüglich der Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse an unterschiedlichen Orten) kann der Vergleich der Uhr in  $O'$  mit *jeder beliebigen* Uhr in  $S$  vorgenommen werden, da alle Uhren in  $S$  auch für den Beobachter in  $S'$  wieder synchron gehen (wenn sie auch nicht dasselbe anzeigen wie seine eigene Uhr). Dieser zweite Fall tritt im Umkehrpunkt ein. Bereits dort können  $B'$  und der ihm gegenüber stehende Beobachter  $B_1$  in  $S$  (der natürlich nicht identisch ist mit  $B$ , der sich ja in  $O$  befindet) ihre Uhren vergleichen. (Das ist der Grund dafür, dass es genügt, lediglich den Hinflug von  $S'$  zu betrachten.

Von der Zeit  $t = 0$  bis zur Zeit  $t = t_1$  (Phase 1) erfahre das System  $S'$  eine konstante Beschleunigung vom Größenwert  $a$ . (Selbstverständlich wird mit zunehmender Geschwindigkeit die zur Beschleunigung benötigte Kraft immer größer. Über die damit verbundenen technischen Probleme aber brauchen wir uns hier keine Sorgen zu machen.) Von  $t_1$  bis  $t_2$  (Phase 2) sei die Geschwindigkeit von  $S'$

konstant gleich  $v_1$ ; von  $t_2$  an (Phase 3) erfahre  $S'$  eine negative Beschleunigung vom Größenwert  $-a$  bis es zur Zeit  $t_3$  relativ zu  $S$  wieder in Ruhe ist.

## 2 Der Vorgang aus der Sicht eines Beobachters in S

Das Minkowski-Diagramm der Hinreise sieht wie folgt aus, wobei die rote Kurve die »Weltlinie« des Punktes  $O'$  ist. Die momentane  $W'$ -Achse des Systems  $S'$  ist die Tangente im jeweils betrachteten Kurvenpunkt der Weltlinie.

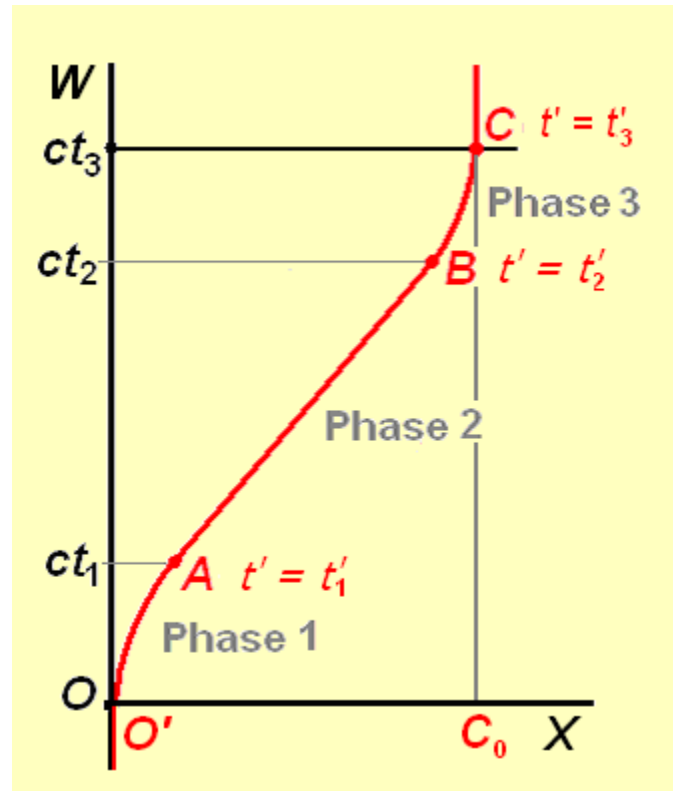


Abb. 1: Weltlinie von  $O'$

Betrachten wir ein kleines Stück der Weltlinie des Punktes  $O'$ . Für die Länge der Sekante zwischen zwei Kurvenpunkten gilt wegen der pseudoeuklidischen Metrik

$$(\Delta w')^2 = (\Delta w)^2 - (\Delta x)^2,$$

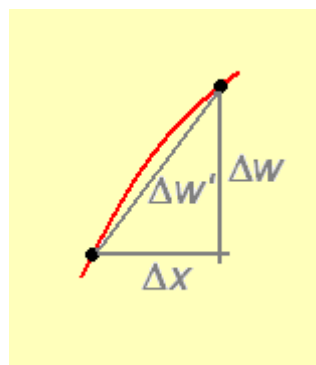


Abb. 2: Sekante der Weltlinie

und für ihr Differential

$$(dw')^2 = (dw)^2 - (dx)^2,$$

woraus mit  $w' = c t'$  und  $w = c t$

$$c^2 (dt')^2 = c^2 (dt)^2 - (dx)^2$$

folgt und schließlich

$$dt' = \sqrt{(dt)^2 - \frac{(dx)^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2} dt = \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} dt.$$

Für die Dauer der drei Phasen im System  $S'$  ergibt sich daraus:

**Phase 1:**

$$\begin{aligned} t'_1 &= \int_0^{t_1} dt' = \int_0^{t_1} \sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}} dt = \int_0^{t_1} \sqrt{1 - \frac{a^2 t^2}{c^2}} dt \\ &= \frac{t_1}{2} \sqrt{1 - \frac{a^2 t_1^2}{c^2}} + \frac{c}{2a} \arcsin \frac{at_1}{c} \quad \text{und mit } at_1 = v_1 \quad \text{und } a = \frac{v_1}{t_1} \\ t'_1 &= \frac{t_1}{2} \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} + \frac{c}{2v_1} t_1 \arcsin \frac{v_1}{c} = \frac{t_1}{2} \left( \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} + \frac{c}{v_1} \arcsin \frac{v_1}{c} \right). \end{aligned}$$

**Künftig gilt die Abkürzung  $\beta := v_1/c$ .**

Damit wird

$$t'_1 = \frac{t_1}{2} \left( \sqrt{1 - \beta^2} + \frac{1}{\beta} \arcsin \beta \right). \quad (1)$$

**Phase 2:**

$$\begin{aligned} t'_2 - t'_1 &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{a^2 t_1^2}{c^2}} dt = \sqrt{1 - \frac{a^2 t_1^2}{c^2}} (t_2 - t_1) \\ t'_2 - t'_1 &= (t_2 - t_1) \sqrt{1 - \beta^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Das entspricht der bekannten relativistischen Zeitdilatation. Für  $t'_2$  folgt daraus

$$\begin{aligned} t'_2 &= (t_2 - t_1) \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} + t'_1 \\ t'_2 &= (t_2 - t_1) \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} + \frac{t_1}{2} \left( \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} + \frac{c}{v_1} \arcsin \frac{v_1}{c} \right) \\ t'_2 &= \left( t_2 - \frac{t_1}{2} \right) \sqrt{1 - \beta^2} + \frac{t_1}{2} \frac{1}{\beta} \arcsin \beta. \end{aligned} \quad (3)$$

### Phase 3:

Wegen der Symmetrie der Phasen 1 und 3 gilt

$$t'_3 - t'_2 = t'_1 = \frac{t_1}{2} \left( \sqrt{1 - \beta^2} + \frac{1}{\beta} \arcsin \beta \right).$$

Aus

$$t'_3 = t'_1 + t'_2$$

folgt

$$\begin{aligned} t'_3 &= \frac{t_1}{2} \left( \sqrt{1 - \beta^2} + \frac{1}{\beta} \arcsin \beta \right) + \left( t_2 - \frac{t_1}{2} \right) \sqrt{1 - \beta^2} + \frac{t_1}{2} \frac{1}{\beta} \arcsin \beta \\ t'_3 &= t_2 \sqrt{1 - \beta^2} + t_1 \frac{1}{\beta} \arcsin \beta. \end{aligned} \quad (4)$$

Dagegen ist

$$t_3 = t_1 + t_2.$$

Die Differenz der Reisezeiten in den beiden Systemen ist somit

$$\Delta T = t_3 - t'_3 = t_1 \left( 1 - \frac{1}{\beta} \arcsin \beta \right) + t_2 \left( 1 - \sqrt{1 - \beta^2} \right). \quad (5)$$

### Zusammenfassung:

Aus der Sicht eines Beobachters in  $S$  werden die Uhren in  $S'$  in der Beschleunigungsphase 1 in zunehmendem Maße verlangsamt. Für das Verhältnis der Zeitdifferentiale gilt dabei

$$\frac{dt'}{dt} = \sqrt{1 - \left( \frac{v(t)}{c} \right)^2} = \sqrt{1 - \left( \frac{at}{c} \right)^2}.$$

Der daraus resultierende Zeitunterschied  $\Delta T_1 = t_1 - t'_1$  am Ende der Phase 1 beträgt

$$\Delta T_1 = t_1 - t'_1 = t_1 \left( 1 - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \beta^2} - \frac{1}{2\beta} \arcsin \beta \right).$$

Während der Phase 2 gehen die Uhren in  $S'$  mit der am Ende der Phase 1 erreichten (verminderten) Ganggeschwindigkeit. Für die Dauer der Phase 2 im Systems  $S'$  gilt daher

$$t'_2 - t'_1 = (t_2 - t_1) \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} = (t_2 - t_1) \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Daraus ergibt sich die in Phase 2 entstandene Zeitversetzung  $\Delta T_2$  (zu diesem Begriff siehe Anmerkung unten)

$$\Delta T_2 = (t_2 - t_1) - (t'_2 - t'_1) = (t_2 - t_1) \left(1 - \sqrt{1 - \beta^2}\right).$$

In Phase 3 wird die Ganggeschwindigkeit der Uhren in  $S'$  auf den ursprünglichen Wert beschleunigt. Für die Zeitversetzung  $\Delta T_3$  in Phase 3 ist wegen der Symmetrie zu Phase 1

$$\begin{aligned} \Delta T_3 &= (t_3 - t_2) - (t'_3 - t'_2) = (t_3 - t_2) \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \beta^2} - \frac{1}{2\beta} \arcsin \beta\right) \\ &= t_1 \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \beta^2} - \frac{1}{2\beta} \arcsin \beta\right). \end{aligned}$$

Für die gesamte Zeitversetzung  $\Delta T$  ergibt sich daraus

$$\Delta T = \Delta T_1 + \Delta T_2 + \Delta T_3 = t_1 \left(1 - \frac{1}{\beta} \arcsin \beta\right) + t_2 \left(1 - \sqrt{1 - \beta^2}\right).$$

Bei symmetrischem Verlauf der Rückreise gilt für die gesamte Zeitversetzung  $\Delta T_g = 2 \Delta T$ .

**Anmerkung:** In der Alltagssprache kann »nachgehen bzw. vorgehen einer Uhr« zweierlei bedeuten:

1. Die Uhr geht langsamer bzw. schneller als die Normaluhr. Beispiel: Eine Uhr geht pro Tag 2 Minuten nach. Richtig geschrieben:  $\Delta t/t = 2 \text{ min/d}$ .
2. Die Uhr geht zeitversetzt (aber in der richtigen Geschwindigkeit). Beispiel: MEZ = GMT + 1 h.

Hier werden künftig die eindeutigen Begriffe »langsamer bzw. schneller gehen« und »zeitversetzt gehen« benutzt.

### Diskussion der Ergebnisse:

1. Für  $v_1 \ll c$  ist

$$\arcsin \beta \approx \beta \quad \text{und} \quad \sqrt{1 - \beta^2} \approx 1,$$

und daher  $\Delta T$  verschwindend klein.

2. Für  $v_1$  gegen  $c$  wird

$$\Delta T \approx t_1 \left(1 - \frac{\pi}{2}\right) + t_2 = t_2 - 0,57 t_1.$$

Wenn außerdem  $t_2 \gg t_1$  ist, wird  $\Delta T \approx t_2$ .

3. Auch für mittlere Werte von  $v_1$  können die Beschleunigungsphasen 1 und 3 gegenüber der Phase 2 vernachlässigt werden, wenn  $t_2 \gg t_1$  ist. Dies ist genau das, was bei der üblichen Behandlung des so genannten Zwillingsparadoxons geschieht, wenn die tatsächliche Weltlinie des reisenden Bruders durch eine geknickte Gerade ersetzt wird. Dieses Vorgehen wird also durch das Ergebnis der exakten Rechnung als brauchbare Näherung gerechtfertigt.

Übrigens stellen die Phasen 1 und 2 zusammen eine vollständigere (und daher auch exaktere) Beschreibung des (hier als bekannt vorausgesetzten) Phänomens der »Langlebigkeit« der Myonen der sekundären Ultrastrahlung dar als die allgemein übliche. Während ihrer Entstehung werden die Myonen auf nahezu Lichtgeschwindigkeit beschleunigt. Für einen Beobachter im unbeschleunigten System »Erde« gehen dann die Uhren im Eigensystem der Myonen erheblich langsamer als die Uhren in seinem System.

### Zahlenbeispiel:

Für die Abb. 3 wurde angenommen  $\alpha = \arctan(v/c) = 40^\circ$ , woraus folgt  $v/c \approx 0,84$ .<sup>1</sup> Daraus ergeben sich dann die Dauer der einzelnen Phasen im System S':

$$\text{Phase 1: } t'_1 = 0,86 t_1,$$

$$\text{Phase 2: } t'_2 - t'_1 = 0,54 (t_2 - t_1),$$

$$\text{Phase 3: } t'_3 - t'_2 = t'_1 = 0,86 t_1$$

Durch Summation der drei Gleichungen ergibt sich  $t'_3$  und zusammen mit  $t_3 = t_1 + t_2$  schließlich die

$$\text{Zeitdifferenz } \Delta T = t_3 - t'_3 = 0,46 t_2 - 0,18 t_1.$$

---

<sup>1</sup> Hinsichtlich  $\tan \alpha = v/c$  siehe <http://home.vrweb.de/~si.pe/Spezielle%20Relativitaetstheorie%20-%20202.%20Teil.pdf> Seite 14.

### 3 Der Vorgang aus der Sicht eines Beobachters in $S'$

Wir berechnen jetzt die Dauer, welche die Phasen 1, 2 und 3 aus der Sicht eines Beobachters im System  $S'$  im System  $S$  haben.

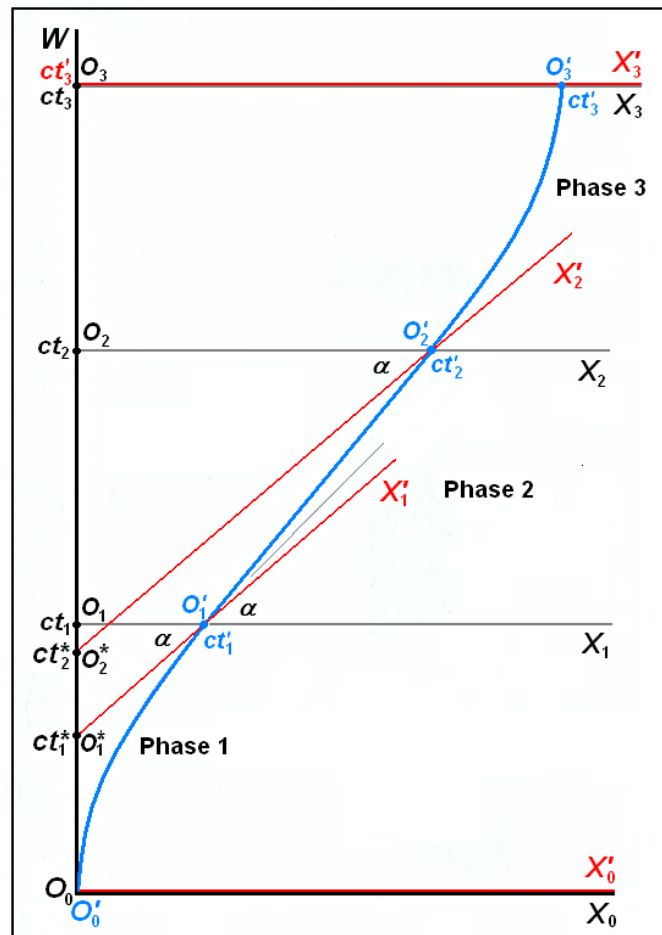


Abb. 3

In Abbildung 3 ist die Lage der  $X'$ -Achse des Systems  $S'$  zu vier verschiedenen Zeitpunkten eingezeichnet. Ihre Schnittpunkte mit der  $W$ -Achse geben die Orte des Punktes  $O$  zu den Zeiten  $t'_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3$ ) an, beurteilt vom System  $S'$  aus. (In  $S$  hat  $O'$  dieselbe  $w$ -Koordinate wie  $O$ , die beiden Punkte sind also in  $S$  »gleichzeitig«. In  $S'$  dagegen ist der Punkt  $O^*_1$  mit  $O'_1$  gleichzeitig, usw.)

Abbildung 4 zeigt einen Ausschnitt aus Abbildung 3:

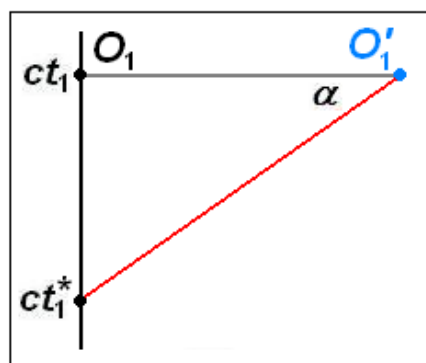


Abb. 4

Es ist

$$\overline{O_1 O'_1} = \frac{a}{2} t_1^2 = \frac{v_1}{2} t_1,$$

und daher

$$c t_1 - c t_1^* = c(t_1 - t_1^*) = \frac{v_1}{2} t_1 \tan \alpha = t_1 \frac{v_1}{2} \frac{v_1}{c}, \quad \left( \tan \alpha = \frac{v_1}{c} \right)$$

$$t_1^* = t_1 \left( 1 - \frac{\beta^2}{2} \right). \quad (6)$$

Mit den oben angenommenen Werten ist

$$t_1^* = t_1 (1 - \frac{1}{2} 0,84^2) = 0,65 t_1.$$

Aus der Sicht des Beobachters in  $S'$  ist also die Phase 1 in  $S$  kürzer als in  $S'$ . Für ihn scheinen also die Uhren in  $S$  langsamer zu gehen als die eigenen. Das beruht, wie man aus Abbildung 3 erkennen kann, auf der Drehung der  $X'$ -Achse. Allerdings gehen für ihn die Uhren in  $S$  in einem anderen Verhältnis langsamer als es die Uhren in  $S'$  für einen Beobachter in  $S$  tun. Das zeigt am einfachsten ein Zahlenbeispiel mit den oben angenommenen Werten:

Es ist für einen Beobachter in  $S$  (siehe Seite 5, Phase 1):  $t'_1 = 0,86 t_1$

Dagegen ist für einen Beobachter in  $S'$  (siehe oben):  $t^*_1 = 0,65 t_1$ , woraus mit  $t_1 = t'_1/0,86$  folgt

$$t^*_1 = 0,76 t'_1.$$

Die Uhren in  $S$  sind also für einen Beobachter in  $S'$  weniger verlangsamt als die Uhren in  $S'$  für einen Beobachter in  $S$ . Die Uhren in den beiden Systemen verhalten sich also nicht mehr symmetrisch im Sinne der Speziellen Relativitätstheorie. Fortan sind die beiden Systeme nicht mehr gleichberechtigt; die Lorentz-Transformationen gelten nicht mehr, und selbst die Lichtgeschwindigkeit ist in  $S'$  nicht konstant (siehe dazu Anlage 1).

Analog ergibt sich aus Abbildung 5:

$$\overline{O_2 O'_2} = \overline{O_1 O'_1} + v_1 (t_2 - t_1) = \frac{v_1}{2} t_1 + v_1 (t_2 - t_1) = v_1 (t_2 - \frac{1}{2} t_1),$$

$$c(t_2 - t_2^*) = v_1 (t_2 - \frac{1}{2} t_1) \tan \alpha = \frac{v_1^2}{c} (t_2 - \frac{1}{2} t_1),$$

$$t_2^* = t_2 (1 - \beta^2) + \frac{t_1}{2} \beta^2, \quad (7)$$

$$t_2^* - t_1^* = t_2 (1 - \beta^2) - t_1 (1 - \beta^2) = (t_2 - t_1) (1 - \beta^2) = (t'_2 - t'_1) \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (8)$$

In Phase 2, in der sich  $S'$  mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, tritt also der bekannte *symmetrische* Effekt der relativistischen Zeitdilatation auf. Für jeden Beobachter gehen die Uhren des anderen Systems langsamer als die des eigenen. Dazu kommt, dass die Uhren in unterschiedlichem Maß zeitversetzt laufen. Diese aus Phase 1 stammende Zeitversetzung wird in die Phasen 2 und 3 übernommen.

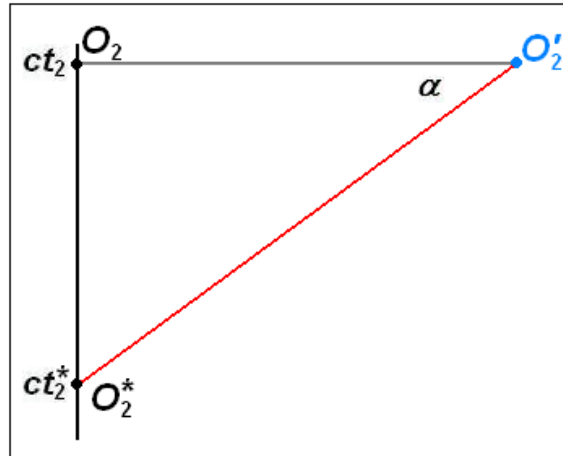


Abb. 5

In Phase 3 vergeht in  $S'$  die Zeit  $t'_3 - t'_2 = t'_1$ , während in  $S$  – immer aus der Sicht eines Beobachters in  $S'$  – die sehr viel größere Zeitspanne  $t_3 - t_2^*$  vergeht. Diese beträgt

$$\begin{aligned}
 t_3 - t_2^* &= t_3 - t_2 (1 - \beta^2) - t_1 \frac{\beta^2}{2} \\
 &= t_3 - t_2 + t_2 \beta^2 - t_1 \frac{\beta^2}{2} \\
 &= t_1 \left( 1 - \frac{\beta^2}{2} \right) + t_2 \beta^2.
 \end{aligned}$$

Dafür kann man auch schreiben

$$t_3 - t_2^* = (t_2 - t_1) \beta^2 + t_1 \left( 1 + \frac{\beta^2}{2} \right), \quad (9)$$

wodurch der Einfluss der Dauer  $(t_2 - t_1)$  der Phase 2 deutlich wird. – Dagegen ist

$$t'_3 - t'_2 = t'_1 = \frac{1}{2} t_1 \left( \sqrt{1 - \beta^2} + \frac{1}{\beta} \arcsin \beta \right).$$

### Beispiel:

Setzt man wieder  $v/c = 0,84$ , erhält man

$$\begin{aligned}
 t_3 - t_2^* &= 0,71(t_2 - t_1) + 1,35t_1, \\
 t'_3 - t'_2 &= 0,86t_1.
 \end{aligned}$$

Der erste Wert ist beträchtlich größer als der zweite, sodass die Zeitverzögerung in der 1. und 2. Phase in der 3. Phase erheblich überkompensiert wird.

Nun wird auch der wahre Grund dafür deutlich, dass  $t'_3 < t_3$  ist: Das Zurückdrehen der  $X'$ -Achse in Phase 3 erfolgt in größerer Entfernung von der  $W$ -Achse als das Drehen während Phase 1. Die  $X'$ -Achse überstreicht dabei in Phase 3 eine der Entfernung von der  $W$ -Achse proportionale Strecke dieser

Achse. Anders gesagt: Die Ursache für das Nachgehen der Uhren in  $S'$  nach der Rückkehr des Zwillings beruht darauf, dass die Bremsphase 3 (und die darauf folgende Beschleunigungsphase beim Rückflug) sich in größerer Entfernung vom Ursprung des unbeschleunigten Systems abspielen als die erste Beschleunigung (Phase 1) und die Bremsphase vor Ende der Reise.

Wie man sieht, verläuft der Vorgang für einen Beobachter in  $S'$  völlig anders als für einen Beobachter in  $S$ . Der Unterschied erklärt sich zum einen aus der pseudoeuklidischen Metrik des Minkowski-Raumes, zum anderen daraus, dass  $S'$  darin zweimal beschleunigt wurde.

#### 4 Konsequenzen für die Grundlegung der Speziellen Relativitätstheorie

In seiner grundlegenden Arbeit zur Speziellen Relativitätstheorie »Zur Elektrodynamik bewegter Körper« führt Einstein zwei zunächst relativ zueinander ruhende Bezugssystem ein und beschreibt detailliert, wie die Uhren in den Systemen synchronisiert werden. In § 3, Abs. 2 der genannten Abhandlung (S. 897) schreibt er dann: „Es werde nun dem Anfangspunkte des einen der beiden Systeme ( $k$ ) eine (konstante) Geschwindigkeit  $v$  in Richtung der wachsenden  $x$  des anderen, ruhenden Systems ( $K$ ) erteilt ...“ Für das Weitere setzt Einstein als selbstverständlich voraus, dass trotz der Beschleunigung, die das System  $k$  erfahren hat, die Uhren in den Ursprüngen  $O$  und  $O'$  der beiden Systeme noch immer synchron gehen. Wie oben in den Kapiteln 2 und 3 gezeigt wurde, ist dies jedoch nicht der Fall. Damit ist eine wesentliche Voraussetzung für die Herleitung der Transformationsgleichungen (Lorentz-Transformationen) nicht mehr erfüllt. Es wäre allerdings voreilig, daraus zu schließen, die gesamte Theorie wäre falsch. Man muss nur anders als von Einstein beschrieben vorgehen, um – ganz allgemein gesagt – die Gleichberechtigung der beiden Systeme zu bewahren. Dazu wird folgendes Vorgehen vorgeschlagen:

Die beiden Systeme  $S'$  und  $S''$  werden bezüglich eines dritten Systems  $S$  in entgegengesetzten Richtungen auf die Geschwindigkeit  $u$  bzw.  $-u$  beschleunigt. Am Ende der Beschleunigung wird der Schnittpunkt der  $X'$ -Achse mit der  $X''$ -Achse als neuer Ursprung  $O'$  bzw.  $O''$  definiert und es werden neue  $W'' / W'$ -Achsen eingeführt. Wegen der Symmetrie gehen die Uhren in diesen Punkten synchron. Ebenso gehen die Uhren in  $S'$  und  $S''$  jeweils untereinander synchron.

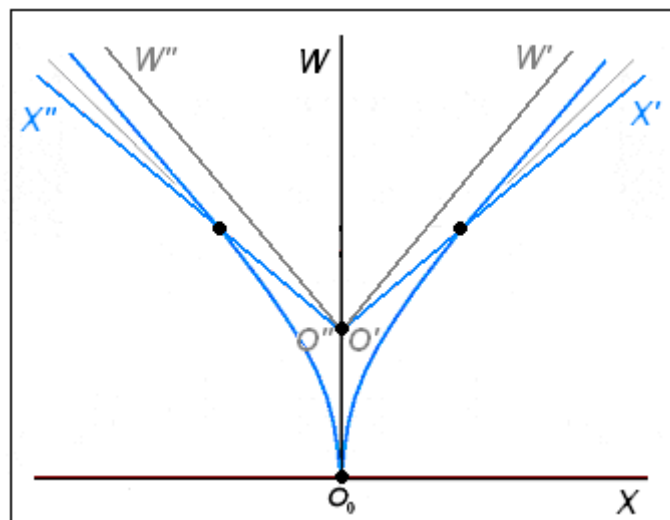


Abb. 7

Damit sind die für die Herleitung der Transformationsgleichungen benötigten Voraussetzungen erfüllt. Allerdings ist, wie sich erst später zeigen lässt (Additionstheorem für Geschwindigkeiten), die Relativgeschwindigkeit  $v$  der beiden Systeme nicht  $2u$ , sondern lediglich

$$v = \frac{2u}{1 + \frac{u^2}{c^2}}.$$

Im Minkowski-Diagramm kann das System  $S''$  anschließend wieder als rechtwinklig dargestellt (und als  $S$  bezeichnet) werden, während  $S'$  als schiefwinklig abgebildet wird.

[Home](#)

[Rückmeldungsformular/Gästebuch](#)

### Anlage 1: Die Lichtgeschwindigkeit im beschleunigten System $S'$

Die folgende Abbildung zeigt im Minkowski-Diagramm die Weltlinie des Ursprungs  $O'$  des beschleunigten Systems  $S'$  (blau) und die Weltlinie eines Lichtimpulses (rot), der zur Zeit  $t = t' = 0$  im Ursprung der beiden Systeme gestartet ist und längs der positiven  $X / X'$ - Achsen verläuft. (Bezeichnungen wie in Abb. 3.)

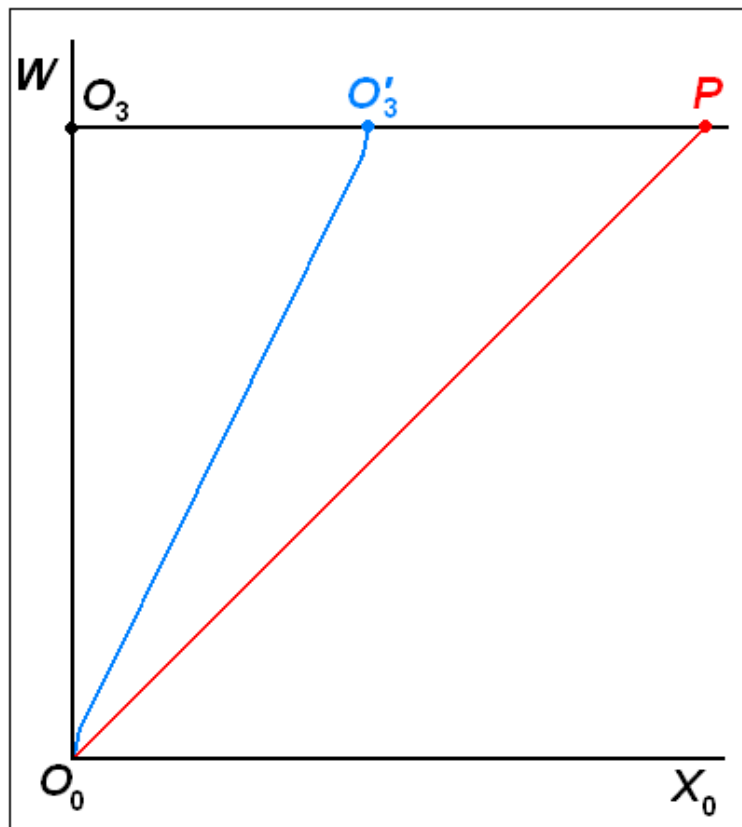


Abb. 6

Es ist zur Zeit  $t = t_3$  und  $t' = t'_3$

$$\text{Lichtweg in } S: \overline{O_3 P} = c t_3$$

$$\text{Lichtweg in } S': \overline{O'_3 P} = \overline{O_3 P} - \overline{O_3 O'_3},$$

wobei

$$\overline{O_3 O'_3} = 2 \frac{v_1}{2} t_1 + v_1 (t_2 - t_1) = v_1 t_2.$$

Die mittlere Lichtgeschwindigkeit  $c'$  in  $S'$  ist

$$c' = \frac{\overline{O'_3 P}}{t'_3} = \frac{c t_3 - v_1 t_2}{t_2 \sqrt{1 - \beta^2} + t_1 \frac{1}{\beta} \arcsin \beta} < \frac{c t_3 - v_1 t_2}{t_2 \sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{und mit } t_3 = t_2 + t_1$$

$$c' < \frac{(c - v_1) t_2 + c t_1}{t_2 \sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{c - v_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \frac{c t_1}{t_2 \sqrt{1 - \beta^2}}.$$

#### Zahlenbeispiel:

Für  $\beta = 0,84$  und  $t_2 = 10 t_1$  folgt daraus

$$c' < \frac{0,16c + 0,1c}{0,54} = \frac{0,26c}{0,54} = 0,48c.$$

#### Spezialfall:

Wenn die Phase 2 entfällt, ist  $t_2 = t_1$  und  $t_3 = 2 t_1$  und

$$c' = \frac{2c t_1 - v_1 t_1}{t_1 \left( \sqrt{1 - \beta^2} + \frac{1}{\beta} \arcsin \beta \right)} = \frac{2c - v_1}{\sqrt{1 - \beta^2} + \frac{1}{\beta} \arcsin \beta}.$$

Für  $v_1 \rightarrow c$  geht  $c' \rightarrow c/(\pi/2) = 0,64 c$ .

## Anlage 2: Übersicht

	Uhr in S Beobachter in S	Uhr in S' Beobachter in S	Uhr in S, Beobachter in S'
Ende der Phase 1 Beginn der Phase 2  Zahlenbeispiel mit $\beta = 0,84$	$t_1$	$t'_1 = \frac{1}{2} t_1 \left( \sqrt{1-\beta^2} + \frac{1}{\beta} \arcsin \beta \right) \quad \beta = \frac{v_1}{c}$ $t'_1 = 0,86 t_1$	$t^*_1 = t_1 \left( 1 - \frac{\beta^2}{2} \right)$ $t^*_1 = 0,65 t_1 = 0,76 t'_1$
Ende der Phase 2 Beginn der Phase 3	$t_2$	$t'_2 = \left( t_2 - \frac{t_1}{2} \right) \sqrt{1-\beta^2} + \frac{t_1}{2} \frac{1}{\beta} \arcsin \beta$ $t'_2 = 0,54 t_2 + 0,32 t_1$	$t^*_2 = t_2 (1 - \beta^2) + \frac{t_1}{2} \beta^2$ $t^*_2 = 0,29 t_2 + 0,35 t_1$
Ende der Phase 3	$t_3$	$t'_3 = t_2 \sqrt{1-\beta^2} + t_1 \frac{1}{\beta} \arcsin \beta$ $t'_3 = 0,54 t_2 + 1,19 t_1$	$t^*_3 = t_3$
Dauer der Phase 2	$t_2 - t_1$	$t'_2 - t'_1 = (t_2 - t_1) \sqrt{1-\beta^2}$ $t'_2 - t'_1 = 0,54 (t_2 - t_1)$	$t^*_2 - t^*_1 = (t_2 - t_1) (1 - \beta^2) = (t'_2 - t'_1) \sqrt{1-\beta^2}$ $t^*_2 - t^*_1 = 0,29 (t_2 - t_1) = 0,54 (t'_2 - t'_1)$
Dauer der Phase 3	$t_3 - t_2$	$t'_3 - t'_2 = t'_1$ $t'_3 - t'_2 = 0,86 t_1$	$t^*_3 - t^*_2 = t_1 \left( 1 - \frac{\beta^2}{2} \right) + t_2 \beta^2$ $t^*_3 - t^*_2 = 0,71 (t_2 - t_1) + 1,35 t_1$